HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, kesä 2016
Harjoitus 1

Ratkaisut palautettava viimeistään maanantaina 23.5.2016 klo 16.15.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1, jossa esitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektorit.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1 ja 2.

Tehtävissä 1–3 tutkitaan vektoreita $\bar{a} = (2, 3)$, $\bar{b} = (3, -1)$ ja $\bar{c} = (-1, 2)$.

1. Piirrä kuva, jossa havainnollistat näitä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita
   a) koordinaatiston pisteinä.
   b) koordinaatiston pisteiden paikkavektoreina.

2. a) Havainnollistetaan vektoria $\bar{a}$ suuntajanalla, jonka lähtöpiste on $P = (1, -1)$. Mikä on tämän suuntajanan päätepiste? Piirrä kuva ja kirjoita lisäksi näkyviin lasku, jolla päätepisteen saa selville.
   b) Havainnollistetaan vektoria $\bar{c}$ suuntajanalla, jonka päätepiste on $Q = (-3, 4)$. Mikä on tämän suuntajanan lähtöpiste? Piirrä kuva ja kirjoita lisäksi näkyviin lasku, jolla lähtöpisteen saa selville.

3. Määritä vektorit $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b} - \bar{c}$ ja $\bar{c} - \bar{a}$
   a) piirtämällä niitä vastaavat suuntajanat koordinaatistoon ja päättelemällä tulos ilman laskuja
   b) laskemalla ilman kuvaa.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 2, jossa siirrytään n-ulotteiseen avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Tehtävissä 4–5 oletetaan, että $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

4. a) Sievennä lauseke $2(\bar{a} - \bar{c}) - 3(\bar{a} - 4\bar{b}) + 5(\bar{c} + \bar{b})$.
   b) Onko a)-kohdan tulos vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarikombinaatio?

5. a) Ratkaise vektori $\bar{x}$ yhtälöstä $\bar{x} + 4\bar{a} - \bar{b} = 3(\bar{x} + \bar{a}) - 3(2\bar{a} - 5\bar{b})$.
   b) Onko a)-kohdan tulos vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarikombinaatio?

6. Merkitään $\bar{v} = (1, -1)$ ja $\bar{w} = (1, 1)$.
   a) Piirrä ruutupaperille koordinaatisto, jonka akselit ovat vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ suuntaiset. Piirrä niiden avulla vektorit $\bar{a} = 2\bar{v} + 4\bar{w}$ ja $\bar{b} = -3\bar{v} + \bar{w}$.
   b) Piirrä tavalliseen koordinaatistoon vektorit $\bar{c} = (1, -3)$ ja $\bar{d} = (6, 2)$. Piirrä samaan kuvaan koordinaatisto, jonka akselit ovat vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ suuntaiset, ja päättele sen avulla, miten vektorit $\bar{c}$ ja $\bar{d}$ voidaan kirjoittaa vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ lineaarikombinaationa.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 3, jossa aiheena ovat suorat ja tasot.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 3, 4, ja 5.

7. Tarkastellaan suoraa $S = \{(-2,1) + t(2,3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
   a) Määritä neljä vektoria joukosta S valitsemalla parametrille t eri arvoja.
   b) Havainnollista a)-kohdassa valitsemiasi vektoreita piirtämällä koordinaatistoon niitä vastaavat pisteet.
   c) Havainnollista a)-kohdassa valitsemiasi vektoreita piirtämällä koordinaatistoon niitä vastaavien pisteiden paikkavektorit.
   d) Piirrä koordinaatistoon suora S.

8. Merkitään $A = (4,-1,3)$ ja $B = (2,1,3)$. Tarkastellaan suoraa S, joka kulkee pisteiden A ja B kautta. Kirjoita suora S vektorimuodossa $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 9, jossa esitellään matriisit.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 6.

9. Merkitään
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$
   Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

   (a) $A + B$ (b) AB (c) AC (d) $A + BC$ (e) $B^\top - 2C$

10. Merkitään
$$H = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix}.$$
   Osoita, että matriisin H käänteismatriisi on M. Onko matriisi H kääntyvä? Entä matriisi M?

11. Anna ja Bella vertailevat kahden apteekin hintoja. He haluavat ostaa alla olevan taulukon mukaiset lääkkeet mahdollisimman edullisesti:

	Särkylääke	Allergialääke	Perusvoide
Anna	10 kpl	2 kpl	3 kpl
Bella	7 kpl	8 kpl	2 kpl

Tuotteiden hinnat eri apteekeissa ovat puolestaan alla:

	Apteekki 1	Apteekki 2
Särkylääke	2,50 €/kpl	2,60 €/kpl
Allergialääke	5,40 €/kpl	5,30 €/kpl
Perusvoide	7,50 €/kpl	7,40 €/kpl

Anna ja Bella laskevat matriisitulon

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}50 \text{ €} & 2{,}60 \text{ €} \\ 5{,}40 \text{ €} & 5{,}30 \text{ €} \\ 7{,}50 \text{ €} & 7{,}40 \text{ €} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58{,}30 \text{ €} & 58{,}80 \text{ €} \\ 75{,}70 \text{ €} & 75{,}40 \text{ €} \end{bmatrix}.$$

Mitä he voivat siitä päätellä?

Tehtäväsarja V

Kurkista kurssimateriaalin lukuun 4, jossa vektorit virittävät aliavaruuksia.

12. Merkitään $\bar{v} = (5, 2)$.
    a) Keksi jokin vektorin $\bar{v}$ lineaarikombinaatio.
    b) Kirjoita joukko, jonka muodostavat vektorin $\bar{v}$ kaikki lineaarikombinaatiot. Käytä joukkomerkintää $\{$ alkio | ehto, jonka alkio toteuttaa $\}$.
    c) Havainnollista b)-kohdassa muodostamaasi joukkoa piirtämällä se koordinaatistoon.
    d) Mitä tarkoittaa merkintä $\text{span}(\bar{v})$?

13. Merkitään $\bar{v} = (5, 2)$ ja $\bar{w} = (-1, 3)$.
    a) Keksi jokin vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ lineaarikombinaatio.
    b) Kirjoita joukko, jonka muodostavat vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ kaikki lineaarikombinaatiot. Käytä vastaavaa joukkomerkintää kuin edellisessä tehtävässä.
    c) Mitä tarkoittaa merkintä $\text{span}(\bar{v}, \bar{w})$?

Tehtäväsarja VI

Seuraavan tehtävän avulla tutustutaan tietokoneen käyttöön lineaarialgebrassa. Jos sinulla on yliopiston AD-tunnus, voit tehdä tehtävän esimerkiksi Exactumin tietokoneluokan C128 koneilla, joista löytyy ohjelma MATLAB. Jos sinulla on oma tietokone, voit ladata siihen ilmaisen ohjelman FreeMat, joka toimii kuten MATLAB. FreeMat löytyy osoitteesta http://freemat.sourceforge.net.

14. a) Kopioi seuraava koodinpätkä MATLABin/FreeMatin komentoikkunaan.

```
A=[20 20 10 10
50 5 7 1
14 0 3 -10
1 -17 4 1]
```

Paina näppäimistön Enter-nappia. Olet nyt muodostanut matriisin nimeltä A.

b) Muodosta matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 17 & 1 & 11 & 14 \\ -44 & 0 & 0 & 4 \\ 14 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

c) Matriisien A ja B tulo AB lasketaan komennolla `A*B`. Laske AB.

d) Laske sitten tulo BA. Vertaa tulosta tuloon AB. Mitä huomaat? Voisiko vastaavaa tapahtua reaalilukujen kertolaskussa?

e) Kokeile, mitä komennot `zeros(4)`, `eye(10)` ja `diag([7,-12,3,1])` tekevät.

f) Muodosta matriisi `I=eye(4)`. Laske sitten tulo AI, missä A on a)-kohdassa määritelty matriisi (sitä ei tarvitse enää syöttää ohjelmaan uudelleen, sillä ohjelma muistaa sen nimen). Mitä huomaat?