

HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, kesä 2016
Harjoitus 2

Ratkaisut palautettava viimeistään maanantaina 30.5.2016 klo 16.15.

Tehtäväsarja I

Kertaa materiaalin lukuja 1–3 ja 9. Tarvitset myös luvusta 4 määritelmän 4.1.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1, 2 ja 3.

1. Määritä se taso T , joka sisältää suoran $S = \{(-3, 1, 2) + t(1, 0, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja kulkee pisteen $P = (1, 2, 4)$ kautta. Anna vastauksesi muodossa $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.
2. Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä samantyyppisiä neliömatriiseja. Ratkaise seuraavista yhtälöistä matriisi X ja sievennä vastauksesi mahdollisimman pitkälle. Lauseesta 9.12 voi olla apua, ehkä myös lauseesta 9.3.

$$(a) (A^{-1}X)^{-1} = (AB^{-1})^{-1}(AB^2) \qquad (b) ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$$

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 4, jossa vektorit virittävät aliavaruuksia.

3. Merkitään $\bar{v} = (5, 2)$.
 - a) Kirjoita vektorin $\bar{v}$ virittämä avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus $\text{span}(\bar{v})$ joukkona samaan tapaan kuin määritelmässä 4.1.
 - b) Luettele neljä alkia vektorin $\bar{v}$ virittämästä aliavaruudesta $\text{span}(\bar{v})$.
 - c) Piirrä kuva vektorin $\bar{v}$ virittämästä aliavaruudesta $\text{span}(\bar{v})$.
4. Merkitään $\bar{v}_1 = (3, 2, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (6, 4, 5)$.
 - a) Kirjoita vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ virittämä avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ joukkona samaan tapaan kuin määritelmässä 4.1.
 - b) Luettele neljä alkia vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ virittämästä aliavaruudesta $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$.
 - c) Jos piirtäisit kuvan vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ virittämästä aliavaruudesta $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, miltä se näyttäisi? Voit hahmotella mallikuvan tai selittää sanallisesti. Kolmiulotteista kuvaa ei tarvitse piirtää.
5. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukkoa $S = \{(1, 3) + t(2, -5) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
 - a) Valitse kaksi vektoria joukosta S . Kuuluuko niiden summa joukkoon S ? Piirrä kuva tilanteesta.
 - b) Tutustu lauseeseen 4.7. Voitko a-kohdan ja lauseen 4.7 avulla päätellä, onko S joidenkin vektorien virittämä avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?

Tehtäväsarja III

Jatketaan vektorien virittämän aliavaruuden käsitteen opiskelua.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 4.

6. Yritä tässä tehtävässä välttää turhia laskuja mahdollisuuksien mukaan.
 - a) Pitääkö paikkansa, että $(3, 8, 4) \in \text{span}((1, 0, 0), (0, 2, 0))$?
 - b) Pitääkö paikkansa, että $(3, 9, 15) \in \text{span}((1, 3, 5), (2, 6, 7))$?
7. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}, \bar{v} + \bar{w})$ alkioita.

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 5, jossa ratkaistaan lineaarisia yhtälöryhmiä.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 7 ja 8.

8. Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla oleviin matriiseihin. Määritä yhtälöryhmien ratkaisut.

$$(a) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad (b) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (c) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Tehtäväsarja V

Tässä tehtäväsarjassa harjoitellaan MATLABin (tai FreeMatin/Octaven) käyttöä.

9. Tämän tehtävän vastausta ei tarvitse kirjoittaa ratkaisupaperiin.
 - a) Määrittele MATLABissa matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -11 & 12 & 10 & 0 \\ 50 & 5 & 7 & 1 & 6 \\ -7 & 0 & 3 & -10 & -12 \\ -11 & 8 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

- b) Muuta edellisen kohdan matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi komennolla `rref(A)`.
10. Ratkaise Matlabin `rref`-komennon avulla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15. \end{cases}$$

Kirjoita ratkaisupaperiisi yhtälöryhmän ratkaisu.

11. Maalari, lvi-asentaja ja sähköasentaja perustavat yhteisyrityksen ja sopivat työskentelevänsä sen puitteissa joka viikko kymmenen tuntia seuraavan aikataulun mukaan:

		Työntekijä		
		Maalari	Lvi-asentaja	Sähköasentaja
Palvelun ostaja	Maalari	2	1	5
	Lvi-asentaja	4	5	1
	Sähköasentaja	4	4	4

Taulukon ensimmäisestä sarakkeesta näkyy esimerkiksi, että maalari tekee kaksi tuntia töitä itselleen, neljä tuntia töitä lvi-asentajalle ja neljä tuntia töitä sähköasentajalle. Taulukon ensimmäiseltä riviltä näkyy, että maalari maksaa itselleen kahden tunnin työstä, lvi-asentajalle yhden tunnin työstä ja sähkömiehelle viiden tunnin työstä.

Verotuksen vuoksi jokaisen heistä pitää määrätä työlleen tuntipalkka. He sopivat valitsevansa tuntipalkkansa niin, että jokainen saa rahaa yhteensä yhtä paljon kuin joutuu toisille maksamaan. Mitkä tuntipalkat heidän tulisi valita, jos tuntipalkkojen pitää olla kokonaislukuja välillä $30 \text{ €} \dots 60 \text{ €}$?

Muodosta tilannetta kuvaava lineaarinen yhtälöryhmä ja ratkaise se joko tietokoneen avulla tai käsin.

Tehtäväsarja VI

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 10, jossa matriisit liitetään yhtälöryhmien ratkaisuun. Vilkaise myös luvun 9 loppua, jossa opetellaan etsimään käänteismatriiseja Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää käyttäen. Tämän tehtäväsarjan laskuissa voi käyttää apuna MATLABia tai FreeMatia/Octavea. Tehtävissä 12–13 tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 5 ja 6.

12. Tämän tehtävän avulla tutustutaan luvun 9 lopussa esitettyyn menetelmään käänteismatriisin määrittämiseksi.

- Tutki, onko matriisi A kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi A^{-1} .
- Tutki, onko matriisi B kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi B^{-1} .

Ohjeet MATLABin/FreeMatin/Octaven käyttäjille:

Määrittele MATLABissa matriisi A ja ykkösmatriisi $I = \text{eye}(3)$. Yhdistä nämä matriisiksi $C = [A \ I]$. Muuta se redusoiduksi porrasmatriisiksi komennolla `rref(C)`. Jos matriisi A on kääntyvä, löytyy sen käänteismatriisi myös komennolla `inv(A)`.

13. a) Tutustu lauseeseen 10.1.
- Oletetaan, että M on matriiseista A ja B se, joka on kääntyvä. Ratkaise yhtälöryhmät $M\bar{x} = \bar{b}_1$ ja $M\bar{x} = \bar{b}_2$, missä $\bar{b}_1 = (1, 2, 3)$ ja $\bar{b}_2 = (-7, 5, 2)$, käyttäen hyväksi käänteismatriisia M^{-1} .