HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, kesä 2016
Harjoitus 3

Ratkaisut palautettava viimeistään maanantaina 6.6.2016 klo 16.15.

Tehtäväsarja I

Kertaa tarvittaessa materiaalin lukuja 1–6 ja 9–10.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1, 2 ja 3.

1. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus W on vektorien $\bar{u} = (1, -1, 4)$ ja $\bar{v} = (1, 1, 0)$ virittämä.
   a) Kirjoita tämä aliavaruus span-merkinnän avulla sekä joukkona samaan tapaan kuin määritelmässä 4.1.
   b) Millaisia muotoa ovat aliavaruuden W vektorit? Oletetaan, että $\bar{w} \in W$. Kirjoita vektori $\bar{w}$ näkyviin komponentteineen.
   c) Havainnollista aliavaruutta W piirtämällä tai kuvailemalla sitä omin sanoin.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 7, jossa määritellään, mitä tarkoittaa vapaus.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 4.

2. Havainnollista piirroksella vektoreita $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ (ks. alla). Etsi sellaiset reaaliluvut s ja t, että vektori $s\bar{u} + t\bar{v}$ on nollavektori. Kuinka monella eri tavalla voit valita luvut s ja t? Onko jono $(\bar{u}, \bar{v})$ vapaa vai sidottu?

   (a) $\bar{u} = (6, -2),\ \bar{v} = (-1, 3)$ (b) $\bar{u} = (6, -2),\ \bar{v} = (-3, 1)$

3. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\bar{v}_2 = (2, -2, 2)$ ja $\bar{v}_3 = (0, 0, 1)$.
   a) Näytä määritelmän 7.1 avulla, että vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.
   b) Voitko kirjoittaa jonkin vektoreista toisten lineaarikombinaationa? Entä voitko kirjoittaa jokaisen vektoreista toisten lineaarikombinaationa? Tee niin, jos mahdollista.

4. Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{w}_2 = (1, 2, 3)$ ja $\bar{w}_3 = (1, -1, 2)$. Onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa? Perustele vastauksesi vapauden määritelmän avulla.

Tehtäväsarja III

Tutustu materiaalin lukuun 8, jossa selviää, mitä tarkoittavat käsitteet kanta ja dimensio. Kertaa tarpeen mukaan myös virittämiseen ja vapauteen liittyviä asioita luvuista 6–7.

5. Esimerkin 8.4 mukaan vektorit $\bar{w}_1 = (2, -1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, 3)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.
   a) Määritä vektorin $\bar{u} = (10, 2)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen. Voit hyödyntää esimerkin 8.4 ratkaisua. Piirrä näitä koordinaatteja havainnollistava kuva. Ota mallia esimerkin 8.6 kuvista 8.27 ja 8.28.

b) Tiedetään, että vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat 3 ja -2. Mistä vektorista on kysymys? Piirrä havainnollistava kuva.

6. Tässä tehtävässä tarkastellaan joukkoa $V = \{(s-2t, 2s-4t, -s+2t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.

   a) Osoita, että V on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus etsimällä sille jotkin virittäjävektorit. Katso tarvittaessa mallia viikon 2 Stack-tehtävästä 4.

   b) Etsi aliavaruudelle V jokin kanta. Tässä kannattaa tutkia, onko virittäjävektoreiden muodostama jono vapaa, vai onko siinä "ylimääräisiä" vektoreita. Muista kannan määritelmä 8.1.

   c) Mikä on aliavaruuden V dimensio? Havainnollista aliavaruutta V piirtämällä tai omin sanoin.

Tehtäväsarja IV

Jatketaan lukujen 6–8 opiskelua. Tehtävissä 7–9 tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (0,2,-1)$, $\bar{v}_2 = (1,2,0)$ ja $\bar{v}_3 = (1,0,2)$. Sarjaan liittyvä Stack-tehtävä kannattaa kuitenkin tehdä ensimmäiseksi.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 5.

7. a) Osoita, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

   b) Eräs vektori $\bar{u}$ esitettiin vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa. Kertoimiksi saatiin 3, -5 ja 6. Mikä vektori oli kyseessä?

8. a) Osoita, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomat toisistaan. Hyödynnä tehtävän 7 matriisia ja vältä turhia laskuja.

   b) Mitä voit päätellä vektorijonosta $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ a-kohdan ja tehtävän 7 nojalla?

9. a) Onko olemassa jokin vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$, jota ei voida esittää vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa? Entä onko olemassa jokin vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$, joka voidaan esittää usealla eri tavalla vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa? Hyödynnä tehtävän 8 b-kohtaa ja lausetta 8.3.

   b) Esitä vektori $\bar{w} = (5,6,7)$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa. Hyödynnä tehtävää 7 ja vältä turhia laskuja.

Tehtäväsarja V

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 11, jossa opitaan laskemaan determinantti ja tutkimaan sen avulla, onko matriisi kääntyvä.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 6 ja 7.

Tehtäväsarja VI

Tehtävässä 10 tutkitaan tarkemmin yhtälönratkaisun periaatteita ja siihen liittyviä loogisia seuraussuhteita. Lue tätä varten kurssisivulta löytyvä teksti yhtälönratkaisusta.

10. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Osoita, että $AB = I$. Onko matriisi B matriisin A käänteismatriisi?

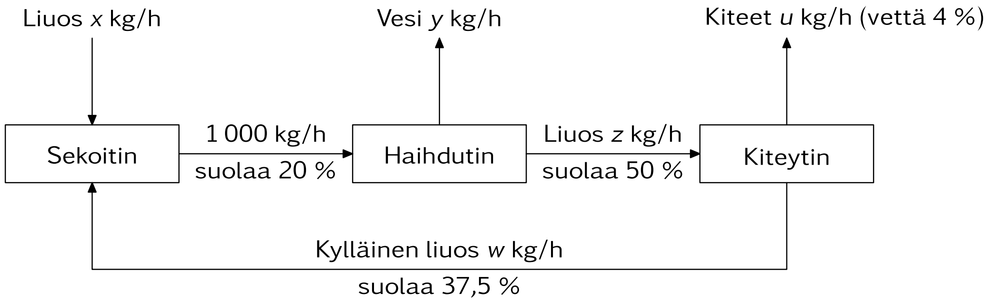
b) Tutkitaan yhtälöä $XA = C$, missä $X \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Tarkastellaan seuraavaa päättelyketjua:

$$\begin{aligned} & XA = C \\ \Leftrightarrow \quad & XAB = CB \\ \Leftrightarrow \quad & XI = CB \\ \Leftrightarrow \quad & X = CB \\ \Leftrightarrow \quad & X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkista, että $X = [-1\ 1]$ ei kuitenkaan ole yhtälön $XA = C$ ratkaisu. Mikä päättelyssä menee pieleen? (Katso tarvittaessa apua kurssisivulla olevasta yhtälönratkaisutekstistä.)

c) Vaihda päättelyketjussa ekvivalenssinuolten tilalle tarpeen mukaan implikaationuolia niin, että päättelyketju on tosi.

11. Prosessissa erotetaan suolayhdistettä kiteyttämällä. Haihduttimeen syötetään 20-prosenttista suolaliuosta 1000 kg/h. Haihduttimessa suolaliuos konsentroidaan 50-prosenttiseksi suolaliuokseksi, joka syötetään kiteyttimeen. Kiteyttimessä liuos jäähtyy ja muodostuu suolakiteitä, jotka sisältävät 4 % vettä. Kiteet erotetaan ja jäljelle jäävä liuos on kylläinen suolan suhteen sisältäen suolaa 37,5 %. Tämä liuos palautetaan sekoittimeen, jossa sen joukkoon lisätään uutta suolaliuosta.



a) Muodosta kolme yhtälöä yllä olevassa kaaviossa esiintyvien määrien x, y, z, u ja w välille käyttäen hyväksi tietoa, ettei ainetta häviä tai synny lisää missään prosessin vaiheessa. Muodosta lisäksi kaksi yhtälöä tarkastelemalla suolan määrää prosessin eri vaiheissa.

b) Ratkaise saamasi viiden yhtälön lineaarinen yhtälöryhmä MATLABilla tai FreeMatilla/Octavella tai käsin Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä.

Jos käytät tietokonetta ratkaisuun, voit edetä seuraavasti: Kirjoita yhtälöryhmän 5×5-kerroinmatriisi ohjelmaan tavalliseen tapaan ja anna sille nimi `A`. Kirjoita yhtälöryhmän vakiot omaksi 5×1-matriisikseen ja anna sille nimi `b`. Tutki matriisin A kääntyvyyttä laskemalla sen determinantti komennolla `det(A)`. Jos matriisi A on kääntyvä, lauseen 10.7. nojalla yhtälöryhmällä on yksikätteinen ratkaisu, joka löytyy komennolla `A\b`. Jos matriisi A ei ole kääntyvä, yksikäsitteistä ratkaisua ei välttämättä ole olemassa. Tällöin kannattaa muuttaa yhtälöryhmän matriisi `[A b]` redusoiduksi porrasmatriisiksi komennolla `rref([A b])`.