**HY / Avoin yliopisto**
**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, kesä 2016**
**Harjoitus 4**

## Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuun 7 eli vapauden käsitteeseen ja homogeenisiin yhtälöryhmiin.

*Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1.*

1. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Onko jono $(\bar{v}, 3\bar{v}, -7\bar{v})$ vapaa vai sidottu? Perustele väitteesi vapauden määritelmän avulla. Kuvan hahmotteleminen voi auttaa ratkaisun keksimisessä.

2. Oletetaan, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomia avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Onko jono $(3\bar{v}_1 + \bar{v}_3,\ 2\bar{v}_1 - 4\bar{v}_2,\ 6\bar{v}_2 + \bar{v}_3)$ vapaa?

## Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät liittyvät kannan käsitteeseen. Kertaa tarvittaessa lukuja 6–8.

*Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 2 ja 3.*

3. Tässä tehtävässä tarkastellaan joukkoa

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}.$$

   a) Osoita, että $W$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus etsimällä sille jotkin virittäjät.

   *Vihje:* Aloita miettimällä, kuinka monta vapaata muuttujaa lineaarisessa yhtälöryhmässä $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ on. Ratkaisemalla tämän yhtälöryhmän pääset tilanteeseen, joka muistuttaa harjoituksen 3 tehtävää 6.

   b) Etsi aliavaruudelle $W$ jokin kanta. Mikä on $\dim(W)$?

   c) Kuuluuko vektori $\bar{u} = (5, 6, 3)$ aliavaruuteen $W$? Entä vektori $\bar{v} = (4, 2, -2)$?

   d) Jos vektori $\bar{u}$ tai $\bar{v}$ kuuluu aliavaruuteen $W$, määritä sen koordinaatit edellä löytämäsi kannan suhteen.

## Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin kappaleeseen 12.1, jossa selviää, mitä ovat matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit.

4. a) Tallenna koneellesi kurssisivulla oleva tiedosto `piirtaminen.m`. Avaa tiedosto MATLABissa tai FreeMatissa/Octavessa ja aja se komennolla `Run` tai `Execute current buffer` (näppämistöltä `F5`).

   b) Muuta koodia niin, että se piirtääkin vektorit $\bar{w} = (-2, 3)$ ja $A\bar{w}$. (Vektori $\bar{w}$ on tulkittava sarakevektoriksi eli $2 \times 1$ -matriisiksi.)

c) Tutki, mitä matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kertominen tekee tason vektoreille testaamalla asiaa eri vektoreilla. Kirjoita johtopäätöksesi ratkaisupaperiin.

Tehtävissä 5–6 tutkitaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$.

5. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (3, 3)$.

   a) Havainnollista vektoreita $\bar{v}_1$ ja $A\bar{v}_1$ koordinaatistossa paikkavektoreina. Voit muokata tehtävän 4 m-tiedostoa tai laskea ja piirtää vektorit käsin.

   b) Havainnollista vektoreita $\bar{v}_2$ ja $A\bar{v}_2$ paikkavektoreina.

   c) Selitä omin sanoin, mitä matriisilla $A$ kertominen tekee vektoreille $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$. Mitä voit tämän perusteella päätellä matriisin $A$ ominaisarvoista ja ominaisvektoreista?

6. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 3)$ ja $\bar{w}_2 = (-1, -3/2)$ sekä $\bar{u}_1 = (3, 4)$ ja $\bar{u}_2 = (0, 1)$.

   a) Havainnollista vektoreita $\bar{w}_1$, $A\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ ja $A\bar{w}_2$ paikkavektoreina.

   b) Selitä omin sanoin, mitä matriisilla $A$ kertominen tekee vektoreille $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$. Mitä voit tämän perusteella päätellä matriisin $A$ ominaisarvoista ja ominaisvektoreista?

   c) Havainnollista vektoreita $\bar{u}_1$, $A\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $A\bar{u}_2$ paikkavektoreina.

   d) Ovatko $\bar{u}_1$ ja $\bar{u}_2$ matriisin $A$ ominaisvektoreita?

## Tehtäväsarja IV

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin kappaleisiin 12.2–12.3, joissa jatketaan ominaisarvoihin liittyvien asioiden opiskelua. Tutkitaan edelleen matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}.$$

7. Oletetaan, että $B$ on $n \times n$-neliömatriisi ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Mikä ehto matriisin $B$ determinantin pitää toteuttaa, jotta yhtälöllä $B\bar{x} = \bar{0}$ olisi muitakin ratkaisuja kuin $\bar{x} = \bar{0}$? Ks. lauseet 10.7 ja 11.3.

   b) Laske matriisin $A - \lambda I$ determinantti ja etsi sen avulla ne luvut $\lambda$, joilla yhtälöllä $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ on muitakin ratkaisuja kuin $\bar{x} = \bar{0}$.

   c) Mitä voit päätellä matriisin $A$ ominaisarvoista?

8. Valitse yksi matriisin $A$ ominaisarvoista, jotka löysit tehtävässä 7. Merkitään sitä symbolilla $\lambda_1$.

   a) Ratkaise yhtälö $A\bar{x} = \lambda_1\bar{x}$ eli yhtälö $(A - \lambda_1 I)\bar{x} = \bar{0}$.

   b) Piirrä koordinaatistoon joukko, jonka muodostavat kaikki a-kohdan yhtälön ratkaisut. Mitä matriisilla $A$ kertominen tekee tämän joukon vektoreille?

   c) Mitä voit päätellä matriisin $A$ ominaisvektoreista?

9. Valitse toinen matriisin $A$ ominaisarvoista, jotka löysit tehtävässä 7. Merkitään sitä symbolilla $\lambda_2$.
   a) Ratkaise yhtälö $A\bar{x} = \lambda_2\bar{x}$ eli yhtälö $(A - \lambda_2 I)\bar{x} = \bar{0}$.
   b) Piirrä koordinaatistoon joukko, jonka muodostavat kaikki a-kohdan yhtälön ratkaisut. Mitä matriisilla $A$ kertominen tekee tämän joukon vektoreille?
   c) Mitä voit päätellä matriisin $A$ ominaisvektoreista?

10. Merkitään $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ja $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
    a) Miten matriisin $D$ lävistäjäalkiot liittyvät tehtävään 7? Entä miten matriisin $P$ sarakkeet liittyvät tehtäviin 8–9? Miten matriisien $D$ ja $P$ sarakkeet liittyvät toisiinsa?
    b) Etsi käänteismatriisi $P^{-1}$ ja laske tulo $P^{-1}AP$. Mitä huomaat?
    c) Onko matriisi $A$ diagonalisoituva? Ks. määritelmä 12.9.
    d) Oliko b-kohdan tulos sattuma? Tutki lausetta 12.11.

## Tehtäväsarja V

Kertaa tarvittaessa materiaalin lukuja 9–11.

*Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 4.*

11. Oletetaan, että $A$ on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 = O$.
    a) Osoita, että matriisi $I - A$ on kääntyvä ja että sen käänteismatriisi on $A + I$.
    b) Osoita esimerkiksi determinantin avulla, että matriisi $A$ ei ole kääntyvä.
    c) Keksi esimerkki $2 \times 2$ -matriisista $A$, jolla $A^2 = O$.

12. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & c & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
    a) Mikä luvun $c$ pitäisi olla, jotta matriisi $A$ ei olisi kääntyvä?
    b) Millaisilla erilaisilla tavoilla voit selvittää a-kohdan vastauksen? Luettele keksimiäsi tapoja.

## Tehtäväsarja VI

Tehtäväsarjan tehtävät pohjautuvat tutkimukseen *Gabriel, K. R. ja Neumann, J. (1962), A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel Aviv. Q.J.R. Meteorol. Soc., 88: 90–95*, jossa tutkittiin sateita Tel Avivissa 27 talvikauden ajan vuosina 1923–1950.

*Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 5 ja 6.*