HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, kesä 2016
Harjoitus 5

Ratkaisut palautettava viimeistään perjantaina 17.6. klo ***14.45*** *(laitoksen sulkemisaika). Myöhässä ratkaisuja voi palauttaa ma 20.6. klo* ***14.45*** *asti.*

Tehtäväsarja I

Tutustu materiaalin lukuun 13, joka käsittelee vektorien pistetuloa.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1, 2, 3 ja 4.

Tehtäväsarja II

Seuraavien tehtävien avulla opiskellaan vektorin projektion käsitettä, josta kerrotaan materiaalin kappaleessa 13.2.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 5.

1. Merkitään $\bar{w} = (1, 2)$. Piirrä (ilman laskuja) kuva projektiosta $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$, jos

   (a) $\bar{v} = (3, 4)$ (b) $\bar{v} = (-1, -3)$ (c) $\bar{v} = (4, -2)$ (d) $\bar{v} = (-2, -4)$.

   Piirrä edellisiin kuviin myös erotusvektori $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

2. Tarkista laskemalla, että piirsit projektiovektorit edellisessä tehtävässä oikein.

3. Olkoot $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq 0$.
   a) Päättele tehtävän 1 piirrosten avulla, mitä on $\text{proj}_{\bar{w}}(\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}))$.
   b) Päättele tehtävän 1 piirrosten avulla, mitä on $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}))$.
   c) Voit perustella havaintosi laskemalla käyttäen lausetta 13.14, jos haluat.
   (Tehtävän voi merkitä tehdyksi, vaikka tekisi vain a- ja b-kohdat.)

Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät liittyvät materiaalin luvun 12 asioihin. Uutena asiana opiskellaan diagonalisointia, josta kerrotaan kappaleessa 12.3.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 6 ja 7.

Tehtäväsarja IV

Tutustu vielä materiaalin lukuun 14, jossa selviää, millainen on avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreiden ristitulo.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 8.

4. Merkitään $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, -3)$ ja $C = (0, 0, -2)$. Määritä pisteiden A, B ja C kautta kulkevan tason T normaalimuotoinen yhtälö ja tutki, onko piste $D = (1, 2, 1)$ tasossa. (*Vihje*: esimerkki 14.5.)

5. Merkitään $\bar{a} = (2, -3, 1)$ ja $\bar{b} = (1, -2, 4)$. Esitä vektori $\bar{v} = (11, -7, -11)$ lineaarikombinaationa kolmesta vektorista, joista yksi on yhdensuuntainen vektorin $\bar{a}$ kanssa, toinen yhdensuuntainen vektorin $\bar{b}$ kanssa ja kolmas kohtisuorassa vektoreita $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vastaan. (*Vihje:* lause 14.4.)

Tehtäväsarja V

Seuraavissa tehtävissä kerrataan ja syvennetään aiempien lukujen asioita.

6. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Onko jono $(\bar{v}_1 - \bar{v}_2,\ \bar{v}_2 - \bar{v}_3,\ \bar{v}_3)$ on vapaa?

7. Olkoon $m \in \{1, 2, \dots\}$. Oletetaan, että $m \times m$-matriisi A on kääntyvä ja avaruuden $\mathbb{R}^m$ jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoita, että jono $(A\bar{v}_1, \dots, A\bar{v}_k)$ on vapaa.

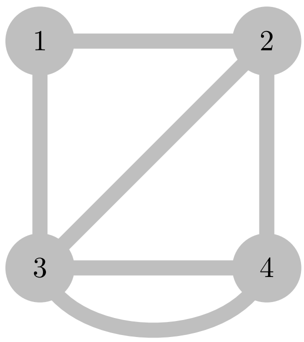
8. Neliömatriisin B sarakkeina ovat eräät vektorit $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \in \mathbb{R}^3$. Matriisin B determinantti on 3. Onko vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta?

9. Oletetaan, että 0 ei ole neliömatriisin C ominaisarvo. Osoita, että C on kääntyvä.

10. Tarkastellaan vektorien $\bar{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, -2, 1)$, $\bar{v}_3 = (3, 2, 2, -1)$ ja $\bar{v}_4 = (1, 2, -2, 1)$ virittämää avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruutta $V = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$.
    a) Määritä kanta aliavaruudelle V. Kannattaa tutustua esimerkkeihin 8.12 ja 8.13. Niissä esitetään kaksi erilaista ratkaisutapaa.
    b) Mikä on aliavaruuden V dimensio?
    c) Onko aliavaruus V suora tai taso?

Seuraavan tehtävän aihe liittyy ns. Markovin ketjuihin (Markov chain) kuten harjoituksen 4 Stack-tehtävät 5 ja 6. Voit käyttää laskujen suorittamiseen MATLABia tai FreeMatia/Octavea.

11. Robotit on ohjelmoitu kulkemaan alla olevan kuvan labyrintissä ja valitsemaan jokaisessa risteyksessä satunnaisesti, mihin suuntaan ne seuraavaksi lähtevät.



    a) Muodosta matriisi P, jossa alkio $P(m, n)$ on se todennäköisyys, jolla yksittäinen robotti siirtyy risteyksestä n risteykseen m.

       Muista, että yllä m viittaa matriisin riviin ja n sarakkeeseen. Esimerkiksi $P(4, 2) = 1/3$ ja $P(1, 1) = 0$.
    b) Tarkastellaan alkutilannetta, jossa jokaisessa risteyksessä on 15 robottia. Miten robotit ovat jakautuneet risteyksiin yhden siirtymän jälkeen?
    c) Tasapainotilanteessa robottien määrä jokaisessa risteyksessä pysyy samana, vaikka robotit jatkavatkin liikkumistaan. Mitä matriisin P ominaisarvoa tämä tilanne vastaisi?

d) Tutki, onko matriisilla P tasapainotilannetta vastaava ominaisarvo ja myönteisessä tapauksessa selvitä siihen liittyvät ominaisvektorit.

Tässä ei kannata ryhtyä etsimään kaikkia ominaisarvoja, vaan tarkistaa pelkästään c-kohdan ominaisarvon olemassaolo esimerkiksi lauseen 12.4 avulla. Sen jälkeen kyseiseen ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit löytyvät tavalliseen tapaan kuten esimerkiksi harjoituksen 4 tehtävässä 8.

e) Miten b-kohdassa mainitut $4 \cdot 15$ robottia pitäisi jakaa eri risteysten välille, jotta robottien määrä risteyksissä pysyisi aina vakiona?

MATLABilla tai FreeMatilla/Octavella matriisin P ominaisarvot löytyvät komennolla `eig(P)`. Komennolla `[V,D] = eig(P)` saa tulokseksi lävistäjämatriisin D, jonka lävistäjällä ovat matriisin P ominaisarvot, ja matriisin V, jonka sarakkeina ovat eräät näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

Tehtäväsarja VI

12. Vastaa Stack-tehtäviä koskevaan kyselyyn viimeistään ma 20.6. klo 23.59. Kyselyn osoite on `https://elomake.helsinki.fi/lomakkeet/71473/lomake.html`. Linkki löytyy myös kurssisivulta.