HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, kesä 2016
Harjoitus 1

Ratkaisut palautettava viimeistään maanantaina 15.8.2016 klo 13.15.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 15. Siinä laajennamme avaruuden $\mathbb{R}^n$ käsitteen yleisemmäksi vektoriavaruuden käsitteeksi.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1, 2 ja 3.

1. a) Piirrä kuva joukosta $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
   b) Osoita, että vektorien tavallinen yhteenlasku ei ole joukossa K määritelty laskutoimitus.
   c) Osoita, että vektorien tavallinen skalaarikertolasku ei ole määritelty joukossa K.
   d) Totea, että K varustettuna vektorien tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla ei ole vektoriavaruus.

2. Esimerkistä 15.6 käy ilmi, että myös funktiot $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostavat vektoriavaruuden, jota tällä kurssilla merkitään kirjaimella $\mathcal{F}$.
   a) Yksi tämän vektoriavaruuden alkio (eli vektori) on funktio f, jolle $f(x) = 2x - 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Piirrä koordinaatistoon funktion f kuvaaja.
   b) Millainen on tämän vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ nollavektori? Piirrä myös sen kuvaaja koordinaatistoon.
   c) Millainen on a-kohdan vektorin f vastavektori $-f$? Piirrä sen kuvaaja samaan koordinaatistoon kuin vektorin f kuvaaja.
   d) Olkoon g funktio, jolla $g(x) = -3x + 5$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Millainen on summavektori $f + g$? Piirrä myös sen kuvaaja koordinaatistoon.

3. Tutkitaan joukkoa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, joka esiintyy myös Stack-tehtävissä 2 ja 3. Tämä joukko on vektoriavaruus, kun yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ on määritelty seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin
   $$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$
   Merkitään tätä vektoriavaruutta V.
   a) Esitä vektoriavaruuden määritelmän ehto 6 käyttäen vektorien yhteenlaskulle ja skalaarikertolaskulle merkintöjä $\oplus$ ja $\odot$. (Älä siis todista mitään äläkä käytä näiden laskutoimitusten määritelmiä, vaan kirjoita ehto 6 sellaisena kuin se on vaihtamalla vain tarvittavien laskutoimitusten symbolit.)
   b) Osoita, että vektoriavaruuden määritelmän ehto 6 pätee joukossa $\mathbb{R}_+$, kun se on varustettu yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$.
   c) Lauseen 15.10 kohdissa a) ja b) todetaan muutamia laskusääntöjä, jotka liittyvät nollan ja nollavektorin käyttäytymiseen skalaarikertolaskussa. Esitä kyseisten lauseenkohtien yhtälöt käyttäen vektoriavaruuden V merkintöjä.
   d) Stack-tehtävässä 2 etsitään avaruuden V nollavektori. Tarkista, että lauseen 15.10 kohdat a) ja b) pätevät vektoriavaruudessa V, käyttäen löydettyä nollavektoria.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 16, joka käsittelee aliavaruuksia. Aliavaruudet ovat vektoriavaruuden osia, jotka ovat itsessään vektoriavaruuksia.

4. Merkitään $W = \{(3x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
   a) Piirrä kuva joukosta W.
   b) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $\bar{u} \in W$. Osoita, että $\bar{w} + \bar{u} \in W$.
   c) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Osoita, että $r\bar{w} \in W$.
   d) Osoita, että $\bar{0} \in W$.
   e) Totea, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

5. Oletetaan tunnetuksi, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus, johon kuuluvat vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ja $\bar{w} = (0, 1, 0, 1)$. Kuuluvatko tällöin myös seuraavat vektorit aliavaruuteen W? Perustele vastauksesi aliavaruuden määritelmällä tai selitä, miksi vastausta ei voida tietää varmasti.

   (a) $\bar{0} = (0, 0, 0, 0)$ (b) $\bar{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$ (c) $\bar{v}_2 = (0, 5, 0, 5)$
   (d) $\bar{v}_3 = (3, 4, 0, 5)$ (e) $\bar{v}_4 = (3, 4, 0, 4)$ (f) $\bar{v}_5 = (0, 1, 0, 0)$

6. Tarkastellaan 2×2 -matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
   a) Osoita, että joukko $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ -3b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.
   b) Etsi aliavaruudelle W virittäjävektorit katsoen mallia esimerkistä 16.10.

7. Onko joukko
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \ ab = 0 \right\}$$
   vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus?

8. Onko joukko $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?

Tehtäväsarja III

Näissä tehtävissä tutustutaan polynomeihin. Reaalikertoimiset polynomit muodostavat vektoriavaruuden, joten polynomit ovat vektoreita uuden määritelmämme mukaan. Polynomeista kerrotaan esimerkissä 15.5.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 4, 5, 6 ja 7.

Tehtäväsarja IV

Luvuissa 17 ja 18 syvennetään tietoja jo aiemmin opiskelluista vapauden ja kannan käsitteistä yleistämällä ne avaruudesta $\mathbb{R}^n$ mihin tahansa vektoriavaruuteen.

9. Tässä tehtävässä käsitellään polynomien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Turhia laskuja kannattaa välttää.

a) Pitääkö paikkansa, että $2x - 2 \in \operatorname{span}(5x^2,\ x-2,\ 2x)$?

b) Pitääkö paikkansa, että $x^4 \in \operatorname{span}(5x^2,\ x-2,\ 2x)$?

10. Merkitään

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Onko vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ jono (B_1, B_2, B_3, B_4) vapaa?

b) Virittävätkö matriisit B_1, B_2, B_3 ja B_4 avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

c) Tutustu lukuun 18.1. Mikä on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dimensio?

d) Tutustu lauseeseen 18.13. Tämän lauseen avulla voit vastata toiseen tehtävän kohdista a) tai b), jos tiedät jo toisen kohdan vastauksen. Selitä täsmällisesti, miten lause auttaa vastaamisessa.

11. Merkitään

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Osoita, että jono $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta. Voit hyödyntää lausetta 18.13 sekä edellisen tehtävän pohdintoja.

b) Määritä matriisi C, jonka koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen on $(2, 7, 1, 8)$. Toisin sanoen määritä matriisi C, jolle pätee $[C]_{\mathcal{B}} = (2, 7, 1, 8)$.

c) Määritä matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

Tehtäväsarja V

Lineaarikuvaukset ovat kuvauksia vektoriavaruudelta toiselle. Ryhdy tutustumaan lukuun 19, jossa ne esitellään.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 8 ja 9.

12. Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2,\ x_2 + x_3)$.

a) Määritä vektorien $(-1, 0, 1)$ ja $(3, -5, -2)$ kuvavektorit kuvauksessa L.

b) Onko L lineaarikuvaus?

13. Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ 2x_1)$ lineaarikuvaus?

14. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1, 0) = (3, -1)$ ja $L(0, 1) = (2, 4)$.

a) Määritä $L(5, -6)$.

b) Oletetaan, että $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Määritä $L(x_1, x_2)$.

Tehtäväsarja VI

Seuraavat tehtävät liittyvät lineaarialgebran sovelluksiin differentiaaliyhtälöiden teoriassa.

15. Ensimmäisen asteen homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' + ay = 0, \tag{$*$}$$

missä $a \in \mathbb{R}$ on jokin vakio. Yhtälön ratkaisulla tarkoitetaan derivoituvaa funktiota $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa kyseisen yhtälön kaikilla muuttujan arvoilla.

Tarkastellaan kaikkien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostamaa vektoriavaruutta $\mathcal{F}$ (ks. esimerkki 15.6). Olkoon S differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisujen joukko eli

$$S = \{y \in \mathcal{F} \mid y' + ay = 0\}.$$

a) Osoita, että funktio $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-ax}$ on yhtälön $(*)$ ratkaisu eli $f \in S$.

b) Osoita, että joukko S on vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ aliavaruus. Derivointikaavoja saa käyttää.

16. Jatkoa edelliseen tehtävään.

a) Olkoot f ja g yhtälön $(*)$ ratkaisuja. Osoita derivoimalla, että funktio f/g, jonka arvot ovat $f(x)/g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, on vakiofunktio niillä alueilla, joilla $g(x) \neq 0$.

b) Päättele, että f ja g ovat toisistaan lineaarisesti riippuvia.

c) Päättele, että aliavaruuden S dimensio on 1.

d) Miten tämän ja edellisen tehtävän tulokset voidaan tulkita yhtälön $(*)$ kannalta?

Ylimääräisiä tehtäviä

Tämän tehtäväsarjan tehtävät ovat teoreettisempia harjoituksia erityisesti matemaatikoksi opiskeleville. Näillä voit korvata minkä tahansa muun tehtävän.

17. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$. Osoita, että $0\bar{v} = \bar{0}$, ts. todista lauseen 15.10 a)-kohta.

18. Neliömatriisi A on *antisymmetrinen*, jos $A^\top = -A$ eli jos matriisin transpoosi on sama kuin sen vastamatriisi. Onko vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ antisymmetristen matriisien joukko aliavaruus?