HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, kesä 2016
Harjoitus 2

Ratkaisut palautettava viimeistään maanantaina 22.8.2016 klo 13.15.

Tehtäväsarja I

Tämän tehtäväsarjan tehtävissä harjoitellaan aliavaruuden määritelmään liittyviä todistuksia sekä jatketaan kantojen ja koordinaattivektorien tutkimista.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1.

1. Onko joukko
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a_{11} - a_{21} - a_{12} = 0 \right\}$$
vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus? Käytä aliavaruuden määritelmää 16.1 ja pyri kirjoittamaan todistus hyvän matemaattisen tyylin mukaisesti.

2. Onko joukko $W = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) = 2\}$ polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus. Käytä aliavaruuden määritelmää 16.1 ja pyri kirjoittamaan todistus hyvän matemaattisen tyylin mukaisesti.

3. Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathcal{P}_2$. Merkitään $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ ja $\mathcal{B} = (-2x,\ x^2 + 4x,\ 3)$.
   a) Tiedetään, että $\mathcal{E}$ on avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta. Osoita, että myös $\mathcal{B}$ on avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta.
   b) Merkitään $p = x^2+x+1$. Määritä $[p]_\mathcal{E}$ eli polynomin x^2+x+1 koordinaattivektori kannan $\mathcal{E}$ suhteen.
   c) Määritä $[p]_\mathcal{B}$ eli polynomin $x^2 + x + 1$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

Tehtäväsarja II

Seuraavissa tehtävissä jatketaan lineaarikuvauksiin tutustumista. Erityisesti tarkastellaan lineaarikuvauksia muissa avaruuksissa kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

4. Tarkastellaan kuvausta $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, jolla $T(\bar{v}) = (v_1 - v_2) + (v_1 + v_2)x$ kaikilla $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Selvitä, minkälaisia ovat avaruuden $\mathcal{P}_1$ alkiot.
   b) Laske $T(2, -7)$ ja $T(4, 1)$.
   c) Keksi tai etsi jokin $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$, jolla $T(\bar{w}) = 2 + 2x$.
   d) Onko T lineaarikuvaus?

5. Tarkastellaan kuvausta $S\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, jolla $S(A) = a_{11}a_{22}$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Toisin sanottuna matriisin A kuvavektori saadaan laskemalla matriisin A lävistäjäalkioiden tulo. Onko S lineaarikuvaus?

6. Onko olemassa lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$, jolle pätee $L(2, 1, 0) = 1 + x$, $L(3, 0, 2) = 2 - x + x^2$ ja $L(0, 6, -8) = -2 + 2x^2$?

Tehtäväsarja III

Tämän sarjan tehtävät liittyvät materiaalin lukuun 19.2.

7. Tarkastellaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kiertää tason vektoreita $90°$ myötäpäivään. Tutkitaan lisäksi aliavaruutta $W = \operatorname{span}((-1,1))$. Piirrä kuva aliavaruudesta W ja päättele kuvan perusteella, miltä joukko LW näyttää. Etsi virittäjävektorit joukolle LW.

Tehtävissä 8–11 tutkitaan seuraavaa tulosta:

Tulos: Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ ja merkitään $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin $LW = \operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$.

8. Vertaa tulosta tehtävän 7 ratkaisuun ja tarkista, että tulos pitää siinä tapauksessa paikkansa.

9. Selitä omin sanoin ilman matemaattisia symboleja, mitä tulos kertoo. Lyhyt ja ytimekäs vastaus riittää.

10. Todista tulos.

11. Tutkitaan kuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ 4x_2,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -2x_1 - 2x_2).$$

Merkitään $W = \operatorname{span}((1,2,1),(1,3,0))$. Määritä joukko LW ja etsi sille virittäjät.

Tehtäväsarja IV

Seuraavat tehtävät liittyvät kappaleeseen 22.1, jossa jatketaan lineaarikuvausten ja matriisien välisen yhteyden tutkimista.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 3, 4 ja 5.

Tehtäväsarja V

12. Merkitään $\bar{v}_1 = (3,3)$ ja $\bar{v}_2 = (2,1)$. Nyt $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Tutkitaan lisäksi vektoria $\bar{b} = (-5,-1)$.
    a) Määritä koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$.
    b) Havainnollista vektoria $\bar{b}$ koordinaatistossa, jonka akselit ovat vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ suuntaisia. Miten kuvasta välittyy koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$?
    c) Tutkitaan sitten luonnollisen kannan $\mathcal{E}$ vektoreita $\bar{e}_1 = (1,0)$ ja $\bar{e}_2 = (0,1)$. Määritä koordinaattivektorit $[\bar{e}_1]_{\mathcal{E}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{E}}$ sekä $[\bar{e}_1]_{\mathcal{S}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{S}}$.
    d) Muodosta matriisi P, jonka sarakkeina ovat $[\bar{e}_1]_{\mathcal{S}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{S}}$.
    e) Mitä matriisilla P kertominen tekee koordinaattivektoreille $[\bar{e}_1]_{\mathcal{E}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{E}}$? Entä koordinaattivektorille $[\bar{b}]_{\mathcal{E}}$?

Tutustu kannanvaihtomatriiseihin, jotka esitellään luvussa 18. Pidä samalla mielessä edellisen tehtävän havainnot. Kannanvaihtomatriisilla kertomalla yhden kannan suhteen kirjoitettu koordinaattivektori voidaan muuttaa toisen kannan suhteen kirjoitetuksi koordinaattivektoriksi.

13. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{S} = ((3,3),(2,1))$ ja $\mathcal{T} = ((1,2),(1,-1))$.
    a) Määritä kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$ kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$.
    b) Erään vektorin koordinaatit kannan $\mathcal{S}$ suhteen ovat 4 ja -10. Mitkä ovat tämän vektorin koordinaatit kannan $\mathcal{T}$ suhteen?

Tehtäväsarja VI

Seuraavien tehtävien on tarkoitus valottaa lineaarialgebran käyttömahdollisuuksia robotiikassa ja tietokonegrafiikassa.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 2.

14. Tehtäväsarjan Stack-tehtävässä selvitettiin, miten robottikättä voi kiertää lineaarikuvauksella. Nyt sinun pitäisi *siirtää* robottikäden päätä kolme askelta vasemmalle ja kaksi ylös eli vektorin $(-3,2)$ verran. Lineaarialgebran kirjaa selailemalla löydät kuvauksen $f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_{a,b}(x_1,x_2) = (x_1+a, x_2+b)$. Se näyttää siirtävän tason pisteitä juuri oikealla tavalla, jos valitaan $a=-3$ ja $b=2$. Rajoituksena kuitenkin on, että robottia ohjaillaan matriisikertolaskun avulla.
    a) Onko $f_{-3,2}$ lineaarikuvaus?
    b) Onko olemassa matriisi A, jolla $f_{-3,2}(\bar{x}) = A\bar{x}$ kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$?

15. Niin sanotuissa *homogeenisissa koordinaateissa* vektori $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ esitetään avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorina $(x_1,x_2,1)$. Oletetaan, että a, b, $\varphi \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

    a) Laske kuvavektorit $L_A(x_1,x_2,1)$ ja $L_B(x_1,x_2,1)$. Vertaa tuloksia tehtävän 14 kuvaukseen $f_{a,b}$ ja Stack-tehtävän ratkaisuun.
    b) Ohjaa robottikäden päätä homogeenisten koordinaattien avulla Stack-tehtävän lopputilanteesta kolme askelta vasemmalle ja kaksi ylös eli vektorin $(-3,2)$ verran. Missä pisteessä robottikäden pää tämän jälkeen on?
    c) Millainen on matriisi, jonka avulla robottikättä saadaan kierrettyä kulman φ verran origon ympäri ja sen jälkeen siirrettyä vektorin (a,b) verran?

Ylimääräinen tehtävä

Tämän tehtäväsarjan tehtävä on teoreettisempi harjoitus erityisesti matematiikoksi opiskeleville. Tällä voit korvata minkä tahansa muun tehtävän.

16. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruudet W ja U. Aliavaruuksien W ja U *summa* on joukko

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}.$$

a) Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia $W = \text{span}(\bar{e}_1)$ ja $U = \text{span}(\bar{e}_2)$. Määritä $W + U$. Miltä se näyttää?

b) Osoita, että jos W ja U ovat avaruuden V aliavaruuksia, myös summa $W + U$ on avaruuden V aliavaruus.

c) Kohdassa b) osoitettiin, että kahden aliavaruuden summa on aina aliavaruus. Keksitkö muita tapoja muodostaa kahdesta aliavaruudesta uusia aliavaruuksia? (Vihje: Voit miettiä esimerkiksi joukko-operaatioita.)