HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, kesä 2016
Harjoitus 3

Ratkaisut palautettava viimeistään maanantaina 29.8.2016 klo 13.15.

Tehtäväsarja I

Kerrataan lineaarikuvauksiin liittyviä todistuksia ja lineaarikuvauksen muodostamista.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1 ja 2.

1. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus peilaa ensin tason kaikki vektorit suoran $\operatorname{span}((1,1))$ suhteen ja sen jälkeen projisoi ne suoralle $\operatorname{span}((2,-1))$.

2. Onko olemassa sellaista lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$, joka kuvaa $L(1,0,0) = x+1$, $L(1,1,0) = x^2$ ja $L(1,1,1) = 2x^2 - x - 1$? Perustele vastauksesi täsmällisesti joko ristiriidan tai esimerkin avulla.

Tehtäväsarja II

Tutustu materiaalin lukuun 20, jossa selviää, mitä ovat lineaarikuvauksen ydin ja kuva.

3. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a+bx+cx^2) = (a-b, b+c)$. Mitkä seuraavista polynomeista kuuluvat kuvauksen L ytimeen $\operatorname{Ker} L$?

   i. $1+x$ ii. $x-x^2$ iii. $1+x-x^2$

4. Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -2x_1-2x_2).$$

   a) Määritä kuvauksen T ydin $\operatorname{Ker} T$.
   b) Onko lineaarikuvaus T injektio?
   c) Selitä omin sanoin, mitä b)-kohdan vastaus tarkoittaa.

5. Tutkitaan vielä lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a+bx+cx^2) = (a-b, b+c)$. Mitkä seuraavista vektoreista kuuluvat kuvauksen L kuvaan $\operatorname{Im} L$?

   i. $(0,0)$ ii. $(1,0)$ iii. $(0,1)$

6. Tarkastellaan uudelleen lineaarikuvausta

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -2x_1-2x_2).$$

   a) Määritä kuvauksen T kuva $\operatorname{Im} T$ ja etsi sille virittäjät.
   b) Onko lineaarikuvaus T surjektio?
   c) Selitä omin sanoin, mitä b)-kohdan vastaus tarkoittaa.

Tehtäväsarja III

Lineaarikuvauksille voidaan määritellä ominaisarvon käsite samalla tavalla kuin matriiseille. Tutustu lukuun 23, jossa käsitellään lineaarikuvauksen ominaisarvoja.

7. Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ominaisvektori $\bar{v} = (0, 4, -2)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $L(\bar{v})$ ja mikä ei? Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

$$\bar{a} = (0, 2, -1), \qquad \bar{b} = (0, -12, 6), \qquad \bar{c} = (1, 1, 1)$$

8. Oletetaan, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ominaisarvo $\lambda_1 = 5$, jota vastaavista ominaisvektoreista yksi on $\bar{v}_1 = (1, 0, 1)$, ja ominaisarvo $\lambda_2 = -2$, jota vastaavista ominaisvektoreista yksi on $\bar{v}_2 = (0, 1, 0)$. Määritä $L(3, -4, 3)$.

9. Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on venytys nelinkertaiseksi vaakasuunnassa ja kutistus puoleen pystysuunnassa.
   a) Määritä $L(1, 0)$, $L(0, 1)$, $L(1, 1)$ ja $L(-1, 2)$. Perustelujen ei tarvitse olla täsmällisiä. Voit käyttää apuna kuvaa.
   b) Määritä kuvauksen L ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit piirroksen avulla samaan tapaan kuin kappaleessa 23.2 tehdään. Älä määritä lineaarikuvauksen matriisia.

Tehtäväsarja IV

Sisätulo yleistää pistetulon käsitettä. Sitä käsitellään kurssimateriaalin luvussa 24.

Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + (v_2 w_2)/4$. Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan tätä sisätuloa.

10. Tutkitaan vektoreita $\bar{a} = (2, 4)$, $\bar{b} = (-1, 2)$ ja $\bar{c} = (-2, 4)$ Mitkä niistä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun sisätulo määritellään edellä annetulla kaavalla?

11. a) Määritä ne vektorit $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, joilla $\|\bar{x}\| = 1$.
    b) Edellä määrittämäsi vektorit muodostavat tutkittavan sisätuloavaruuden yksikköympyrän. Hahmottele kuva tästä joukosta.

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan vektoriavaruutta

$$C([0, 1]) = \{f\colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}.$$

Tässä avaruudessa voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx.$$

12. Tutkitaan funktioita $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ja $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x$.
    a) Määritä sisätulo $\langle f, g \rangle$.
    b) Määritä projektio $\mathrm{proj}_g(f)$. (Sisätuloavaruuden projektio määritellään samalla tavalla kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ tavallinen projektio.)

13. Keksi kaksi nollasta poikkeavaa avaruuden $C([0, 1])$ alkiota, jotka ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan. Voit halutessasi käyttää hyväksi edellistä tehtävää.

Tehtäväsarja V

Tutustu materiaalin kappaleeseen 24.2, jossa selviää, millainen on ortogonaalinen jono, ja kappaleeseen 24.3, jossa kohdataan aliavaruuden kohtisuora komplementti.

14. Onko avaruuden $\mathbb{R}^3$ jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ortogonaalinen tai ortonormaali, jos
    a) $\bar{v}_1 = (4, -1, 1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 0, 4)$ ja $\bar{v}_3 = (-4, -17, -1)$?
    b) $\bar{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 2, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$?

15. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \{(2a, 3a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$?

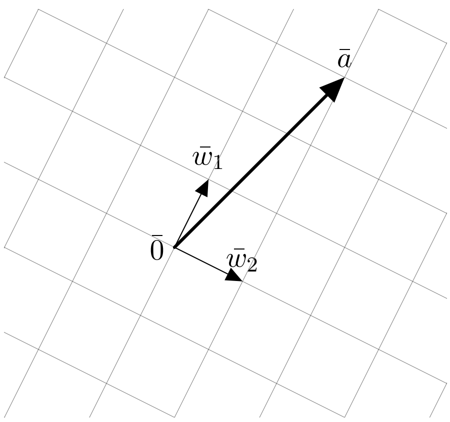
    (a) $\bar{v}_1 = (2, 4, -15)$ (b) $\bar{v}_2 = (3, 0, -6)$ (c) $\bar{v}_3 = (0, -4, 12)$

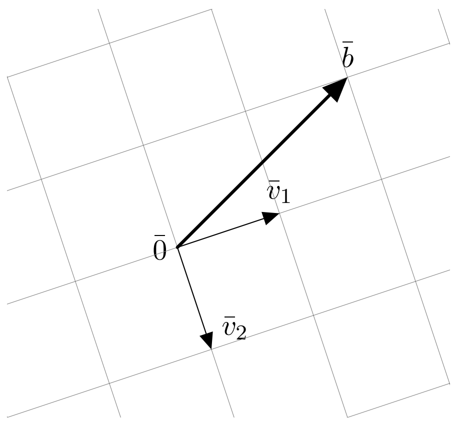
16. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mieti kuvan avulla, miltä aliavaruus W ja sen kohtisuora komplementti $W^\perp$ näyttävät. Tarkkaa perustelua ei tarvita.

Tehtäväsarja VI

Tässä tehtäväsarjassa palataan kurssimonisteen lukuun 18.2, jossa käsitellään vektorin koordinaatteja eri kantojen suhteen.

17. a) Vasemmanpuoleisessa kuvassa näkyy avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori $\bar{a}$ kannan $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ määräämässä koordinaatistossa. Päättele kuvasta, mikä on vektorin $\bar{a}$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{T}$ suhteen. Toisin sanottuna päättele, mikä on $[\bar{a}]_\mathcal{T}$.
    b) Oikeanpuoleisessa kuvassa näkyy avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori $\bar{b}$ kannan $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ määräämässä koordinaatistossa. Päättele kuvasta, mikä on vektorin $\bar{b}$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen. Toisin sanottuna päättele, mikä on $[\bar{b}]_\mathcal{S}$.
    c) Tiedetään, että $[\bar{x}]_\mathcal{T} = (-1, 2)$. Piirrä vektori $\bar{x}$ vasemmanpuoleiseen koordinaatistoon.
    d) Tiedetään, että $[\bar{y}]_\mathcal{S} = (-1, 2)$. Piirrä vektori $\bar{y}$ oikeanpuoleiseen koordinaatistoon.
    e) Onko totta, että $\bar{x} = \bar{y}$?





18. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kannan $\mathcal{T}$ vektorit ovat $\bar{w}_1 = (1,2)$ ja $\bar{w}_2 = (2,-1)$. Kannan $\mathcal{S}$ vektorit ovat $\bar{v}_1 = (3,1)$ ja $\bar{v}_2 = (1,-3)$.
    a) Määritä vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T}$ suhteen.
    b) Muodosta kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$.
    c) Mitkä ovat tehtävän 17 vektorin b koordinaatit kannan $\mathcal{T}$ suhteen?
    d) Mitä voit päätellä tehtävän 17 vektoreista $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ edellisen kohdan perusteella?

19. Avaruudella $\mathbb{R}^2$ on kannat $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Tiedetään, että erään vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ koordinaattivektori kannan S suhteen on $[\bar{v}]_{\mathcal{S}} = (1,-3)$. Lisäksi seuraavat kannanvaihtomatriisit ovat tiedossa:

$$P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritä:

(a) $[\bar{v}]_{\mathcal{T}}$ (b) $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{R}}$ (c) $[\bar{v}]_{\mathcal{R}}$

20. Polynomiavaruudella $\mathcal{P}_2$ on kannat $\mathcal{S} = (x^2-1, x+1, x-1)$ ja $\mathcal{T} = (1, x, x^2)$. Määritä kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$.

Tehtäväsarja VII

Seuraava tehtävä havainnollistaa ominaisarvojen ja -vektoreiden sovellusmahdollisuuksia.

21. Kaukaisen saaren rantavesissä elää eriskummallisia pingviinejä ja kaloja, joiden vuosittaiset lukumäärät riippuvat toisistaan seuraavasti: Olkoon $P(n)$ pingviinien lukumäärä vuonna n ja olkoon $K(n)$ kalojen lukumäärä vuonna n. Tällöin seuraavan vuoden lukumäärät saadaan yhtälöistä

$$P(n+1) = 0{,}86P(n) + 0{,}08K(n)$$

ja

$$K(n+1) = -0{,}12P(n) + 1{,}14K(n).$$

    a) Miten voit hyödyntää matriisikertolaskua pingviinien ja kalojen vuosittaisten lukumäärien laskemisessa?
    b) Mikä pitää pingviinipopulaation koon $P(n)$ ja kalapopulaatioiden koon $K(n)$ olla, jotta seuraavana vuonna molemmat olisivat kasvaneet tai pienentyneet samassa suhteessa? Toisin sanoen jotta $P(n+1) = aP(n)$ ja $K(n+1) = aK(n)$ jollakin $a \in \mathbb{R}$.

Ylimääräisiä tehtäviä

Tämän tehtäväsarjan tehtävät ovat haastavampia harjoituksia erityisesti matematiikoksi opiskeleville. Näillä voit korvata minkä tahansa muun tehtävän.

22. Tutkitaan funktioita

$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=x, \\ g&\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad g(x)=x^2 \quad \text{ja} \\ h&\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad h(x)=e^x. \end{aligned}$$

Onko funktioavaruuden F jono (f, g, h) vapaa?

23. Lineaarikuvaus L peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((2,3))$ suhteen. Diagonalisoi lineaarikuvauksen L standardimatriisi määrittämättä itse standardimatriisia. Päättele sen jälkeen diagonalisoinnin perusteella, miltä standardimatriisi näyttää.