HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, kesä 2016
Harjoitus 4

Ratkaisut palautettava viimeistään maanantaina 5.9.2016 klo 13.15.

Tehtäväsarja I

Isomorfismi on bijektiivinen lineaarikuvaus. Isomorfismeja käsitellään luvussa 21. Tämän sarjan ensimmäisissä tehtävissä tutkitaan yläkolmiomatriiseista muodostuvaa vektoriavaruutta

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

sekä kuvausta $L\colon U \to \mathbb{R}^3$, joka kuvaa $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \mapsto (a_1, a_2, a_3)$ kaikilla $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

1. Osoita, että kuvaus L on lineaarinen.

2. Määritä kuvauksen L ydin ja kuva.

3. a) Osoita edellisen tehtävän avulla, että L on isomorfismi.
   b) Olet nyt osoittanut, että vektoriavaruudet U ja $\mathbb{R}^3$ ovat isomorfiset. Selitä omin sanoin, miten sen voi arvata katsomalla vektoriavaruuksien U ja $\mathbb{R}^3$ määritelmiä.

4. Mieti, minkä toisen avaruuden kanssa seuraavat avaruudet voisivat olla isomorfisia. Kirjoita myös näkyviin kuvaus, joka toimii avaruuksien välisenä isomorfismina. Kuvausta ei tarvitse täsmällisesti perustella isomorfismiksi.
   a) Jokin polynomiavaruus $\mathcal{P}_n$ (voit valita luvun n sopivasti).
   b) Jokin matriisiavaruus.
   c) Edellisten tehtävien avaruus U (etsi jokin muu avaruus kuin $\mathbb{R}^3$).

Tehtäväsarja II

Tässä tehtäväsarjassa kerrataan ja syvennetään tietämystä lineaarikuvauksen ytimestä ja kuvasta.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 1, 5.

5. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on injektiivinen lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että avaruuden V jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on vapaa. Osoita, että myös jono $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on vapaa.

Tehtäväsarja III

Tässä tehtäväsarjassa syvennetään ymmärrystä lineaarikuvauksen ominaisarvoihin liittyen.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 2 ja 3.

6. Tässä tehtävässä harjoitellaan niin kutsuttua itseselittämisen strategiaa, josta löytyy lisää tietoa kurssisivulta. Tehtävässä pureudutaan lauseeseen 23.8 ja sen todistukseen. (Jos haluat hiukan enemmän haastetta, voit valita minkä tahansa lauseen luvusta 22.)

   a) Tarkastele lausetta 23.8 ja kirjaa muistiin havaintosi. Todistuksen voi vielä tässä vaiheessa jättää huomiotta.

      - Mitkä ovat lauseessa mainittujen käsitteiden määritelmät?
      - Selitä omin sanoin, mitä lause sanoo.

   b) Ryhdy sitten tutkimaan lauseen todistusta virke virkkeeltä. Toimi kunkin virkkeen kohdalla seuraavasti:

      - Mieti, mitä ideoita virkkeessä on käytetty. Jos virke sisältää oletuksia, miksi niitä on tehty? Jos virke sisältää väitteitä, mihin ne perustuvat? Nojautuvatko ne kenties määritelmiin, lauseisiin tai todistuksessa aiemmin todettuihin asioihin?
      - **Selitä itsellesi**, mitä virkkeessä tapahtuu ja miten se liittyy aiempiin todistuksessa esiintyneisiin virkkeisiin tai aiempaan omaan tietämykseesi asiasta.
      - Kirjoita selityksesi ylös. Pane erityisesti merkille, jos jokin virkkeen ideoista on ristiriidassa aiemman käsityksesi kanssa.

      Ennen kuin siirryt seuraavaan virkkeeseen, kysy itseltäsi:

      - Ymmärränkö rivillä käytetyt ideat?
      - Ymmärränkö miksi ideoita käytettiin?
      - Millä tavoin ideat ovat yhteydessä muihin todistuksessa käytettyihin ideoihin, muihin lauseisiin tai aiempaan tietämykseeni?
      - Auttavatko kehittämäni **selitykset** minua vastaamaan näihin kysymyksiin?

7. Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (5, 2, -1, 0)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 0, -3, 4)$. Keksi ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kanssa. Perustele vastauksesi ominaisvektorin määritelmän avulla.

Tehtäväsarja IV

Seuraavissa tehtävissä jatketaan kohtisuoran komplementin käsitteen opiskelua. Kertaa tarpeen mukaan kappaleen 24.3 asioita.

Sarjaan liittyvät Stack-tehtävät: 4.

8. Kuvaile, miltä näyttävät seuraavissa tapauksissa avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus W ja sen kohtisuora komplementti $W^\perp$. Perustelujen ei tarvitse olla tarkkoja.

$$\text{(a)}\quad W = \operatorname{span}((0,2,0),(0,0,-5)) \qquad \text{(b)}\quad W = \{\bar{0}\}.$$

9. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \{(a, -a+b, a+2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

   a) Onko vektori $\bar{v} = (1, 1, 1)$ ortogonaalisessa komplementissa $W^\perp$?

   b) Onko vektori $\bar{u} = (3, 2, -1)$ ortogonaalisessa komplementissa $W^\perp$?

10. Jatkoa tehtävään 9. Määritä $W^\perp$ ja etsi sille jotkin virittäjät. *Vihje: lause 24.24.*

Tehtäväsarja V

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.4, jossa käsitellään projektiota. Nyt emme enää projisoi pelkästään yhden vektorin virittämille aliavaruuksille, vaan aliavaruudet voivat olla useampiulotteisia.

11. Kaverisi tutki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, missä $\bar{w}_1 = (2, -2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, -1, 5)$. Hän halusi laskea vektorin $\bar{v} = (1, 2, 3)$ projektion tälle aliavaruudelle. Ensin kaverisi laski projektion näin:

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 = \frac{1}{9}(2, -2, 1) + \frac{14}{27}(1, -1, 5) = \left(\frac{20}{27}, -\frac{20}{27}, \frac{71}{27}\right).$$

Tutkiessaan asiaa tarkemmin, hän huomasi, että aliavaruudelle voi löytää monta erilaista kantaa. Esimerkiksi vektorit $\bar{u}_1 = (2, -2, 1)$ ja $\bar{u}_2 = (-1, 1, 4)$ muodostavat avaruuden W kannan. Sen jälkeen hän laski projektion toisella tavalla:

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1}\bar{u}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2}\bar{u}_2 = \frac{1}{9}(2, -2, 1) + \frac{13}{18}(-1, 1, 4) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right).$$

Miksi vastaukset eivät ole samat? Kumpi niistä on oikea?

Seuraavat tehtävät purkavat ideoita, jotka liittyvät ortogonaalisiin kantoihin sekä Gramin–Schmidtin menetelmään. Niissä tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $U = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, missä $\bar{v}_1 = (1, -1, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 3, 3)$.

12. Etsi aliavaruudelle U ortogonaalinen kanta seuraavasti: Valitse ensimmäiseksi kantavektoriksi $\bar{v}_1$ ja etsi sitten vektori, joka on ortogonaalinen vektorin $\bar{v}_1$ kanssa. Käytä tässä apuna projektiota $\text{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{v}_2)$.

13. Merkitään $\bar{a} = (2, -1, 4)$. Määritä projektio $\text{proj}_U(\bar{a})$.

14. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kirjoita vektori $\bar{a}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden U ja toinen aliavaruuden $U^\perp$ alkio.

Grande Finale

Valitse seuraavista tehtävistä vähintään kolme. Jäljelle jäävät ovat ylimääräisiä tehtäviä.

15. Keksi surjektiivinen lineaarikuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^3$ avaruudelle $\mathbb{R}^2$. Perustele vastauksesi. Pystytkö keksimään neljä erilaista kuvausta?

16. Autiomaassa elää kojootteja ja maantiekiitäjiä. Niiden kantojen vuosittaiset koot riippuvat toisistaan seuraavasti: Olkoon $K(n)$ kojoottien lukumäärä vuonna n ja $M(n)$ maantiekiitäjien lukumäärä vuonna n. Tällöin

$$K(n + 1) = 0{,}86K(n) + 0{,}08M(n)$$

ja

$$M(n + 1) = -0{,}12K(n) + 1{,}14M(n).$$

a) Keksi matriisi A, jolle pätee

$$A \begin{bmatrix} K(n) \\ M(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(n+1) \\ M(n+1) \end{bmatrix}.$$

b) Matriisilla A on ominaisarvo 1,1, jota vastaa ominaisavaruus $\operatorname{span}((1/3, 1))$. Jos eräänä vuonna kojootteja on 6 ja maantiekiitäjiä 18, mikä on tilanne seuraavana vuonna? Entä viiden vuoden kuluttua? Entä 20 vuoden kuluttua?

17. Osoita, että vektoriavaruus

$$T = \{(5a + b, a - b, 3a + 4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa etsimällä näiden avaruuksien välille jokin isomorfismi.

Vihje: Selvitä ensin, miltä avaruus T näyttää. Kuvausta määriteltäessä kannattaa valita lähtöavaruudeksi $\mathbb{R}^2$ ja määritellä kuvaus matriisin avulla.

18. Oletetaan, että V ja W ovat vektoriavaruuksia, joille pätee $\dim(V) < \dim(W)$. Osoita, että ei ole olemassa surjektiivista lineaarikuvausta avaruudelta V avaruudelle W.

19. Merkitään $W = \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3, f_4)$, missä f_1, f_2, f_3, $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat funktioita, joilla $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = e^x$ ja $f_4(x) = xe^x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

a) Osoita, että jono $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ on kanta.

b) Määritä funktion $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 4 + 3x - 2xe^x$, koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen eli $[h]_{\mathcal{B}}$.

20. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja U sen aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in U$, jos ja vain jos $\operatorname{proj}_U(\bar{v}) = \bar{v}$.

21. Tutustu kurssisivulla olevaan oppimistavoitematriisiin. Mieti, mitkä oppimistavoitteet olet jo saavuttanut ja mitä asioita sinun tulee vielä harjoitella. Merkintöjen tekeminen matriisiin voi olla avuksi. (Voit vaikkapa tulostaa matriisin paperille.)

Kirjoita ratkaisupaperiin lyhyt selostus siitä, missä asioita sinun täytyy harjoitella ja miten sen aiot tehdä.