Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 1 (2 sivua)
18.3.2008

1. Olkoot
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Laske permutaatiot $\sigma\tau$ ja σ^{-1} sekä ratkaise yhtälö $\sigma^{-1}\xi\sigma = \tau$ muuttujan $\xi \in S_6$ suhteen. Esitä lisäksi permutaatiot σ, τ ja ξ erillisten syklien tuloina.

2. Tätä tehtävää varten sinun pitää laatia jokin numerointi Rubikin kuution ruuduille keskiruutuja lukuunottamatta, jotta voit kuvata Rubikin ryhmän permutaatiot symmetrisen ryhmän S_{48} alkioina. Esitä valitsemasi numeroinnin avulla jokin Rubikin ryhmän perussiirroista erillisten syklien tulona.

3. Olkoon $(G, \cdot)$ jokin ryhmä. Merkitään joukon G kaikkien permutaatioiden ryhmää S_G. Osoita, että G on isomorfinen jonkin S_G:n aliryhmän kanssa.

   Ohje. Liitä jokaiseen ryhmän G alkioon g kuvaus $\sigma_g : G \to G$, jolle pätee $\sigma_g(x) = gx$. Osoita, että kuvaus σ_g on permutaatio (eli bijektio) kaikilla $g \in G$ ja että kuvaus $g \mapsto \sigma_g$ on homomorfismi ryhmältä G ryhmään S_G.

4. Laske tulot $\Delta(\sigma)$ ja Δ_4 määritelmän perusteella, kun
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$
Päättele tästä permutaation σ etumerkki. Laske sitten σ:n etumerkki sykliesityksestä lähtien. Laske vielä permutaation τ etumerkki haluamallasi tavalla, kun
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 11 & 2 & 8 & 6 & 10 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

5. Osoita, että joukon S_n parillisten permutaatioiden joukko
$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$$
on ryhmän S_n aliryhmä.

6. Tarkastellaan *viidentoista peliä.* Siinä on 4×4-kehikkoon asetettu viisitoista numeroitua neliötä (ks. kuva toisella sivulla). Neliöt voivat liikkua toistensa suhteen niin, että tyhjän paikan vierellä oleva neliö voidaan aina siirtää tyhjään paikkaan (perussiirto). Tehtävänä on saada numerot järjestykseen vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas, niin että tyhjä paikka jää viimeiseksi oikeaan alakulmaan.

   Osoita, että kuvan mukaisesta asemasta lähtien peliä on mahdoton ratkaista.

   Vihje. Näytä ensin, että mikä tahansa siirtoyhdistelmä, joka annetusta asemasta lähtien palauttaa tyhjän paikan oikeaan alakulmaan, sisältää parillisen määrän yhden palan perussiirtoja. Vertaa sitten tällaisen yhdistelmän etumerkkiä ratkaisemiseen tarvittavan permutaation etumerkkiin.

1	2	3	14
10	6	7	8
9	4	11	12
13	5	15	