Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
Harjoitus 1 (25. tammikuuta)
Ratkaisuja (Jouni Siren)

1. Olkoot S ja S' verkon maksimaalisia pariutuksia. Tarkastellaan kaarta $(u, v) \in S'$. Pariutuksessa S voi olla korkeintaan yksi kaari, jolla on päätepisteenä solmu u, ja korkeintaan yksi kaari, jolla on päätepisteenä solmu v. Jokaista pariutuksen S' kaarta vastaa siis korkeintaan kaksi pariutuksen S kaarta. Toisaalta jokaisen pariutuksen S kaaren e täytyy koskettaa jotain pariutuksen S' kaarta, sillä muuten $S' \cup \{e\}$ olisi pariutus eikä S' olisi maksimaalinen. Näin ollen $|S| \leq 2 \cdot |S'|$.

   Olkoon S_A on ahneen algoritmin löytämä maksimaalinen pariutus ja S_{OPT} lukumääräisesti pienin maksimaalinen pariutus. Koska $S_A \leq 2 \cdot |S_{\mathsf{OPT}}|$, on ahne algoritmi 2-approksimointialgoritmi lukumääräisesti pienimmän maksimaalisen pariutuksen löytämiseen.

2. Olkoon T verkon G syvyyssuuntainen virittävä puu ja S sen sisäsolmujen joukko. Oletetaan, että verkossa olisi kaari lehtisolmujen u ja v välillä. Koska u (v) on lehtisolmu, täytyy syvyyssuuntaisen läpikäynnin käydä kaikissa sen naapureissa ennen sitä. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä u ja v ovat toistensa naapureita. Kaikissa kaarissa ainakin toisen pään täytyy siis olla puun T sisäsolmu, joten S on verkon G solmupeite.

   Muodostetaan puussa T ahne pariutus tekemällä syvyyssuuntainen läpikäynti ja pariuttamalla kukin vielä pariton sisäsolmu ensimmäisen lapsensa kanssa. Koska jokainen kaari peittää korkeintaan kaksi sisäsolmua, saadaan näin pariutus, jossa on ainakin $\lceil |S|/2 \rceil$ kaarta.

   Edellisen perusteella verkon G maksimipariutuksessa on ainakin $\lceil |S|/2 \rceil$ kaarta, joten pienimmässä solmupeitteessä täytyy myös olla vähintään $\lceil |S|/2 \rceil$ solmua. Näin ollen joukon S tulostava algoritmi on 2-approksimointialgoritmi solmupeiteongelmaan.

3. Olkoot Π_1 ja Π_2 NP-minimointiongelmia ja (f, g) approksimointisuhteen säilyttävä palautus ongelmasta Π_1 ongelmaan Π_2. Oletetaan, että A on α-approksimointialgoritmi ongelmaan Π_2, ja tarkastellaan algoritmia $I \mapsto g(I, A(f(I)))$.

   Tarkastellaan ongelman Π_1 tapausta I. Palautuksen määritelmän (luentokalvojen sivu 23) mukaisesti

   $$\mathsf{obj}_{\Pi_1}(I, g(I, A(f(I)))) \leq \mathsf{obj}_{\Pi_2}(f(I), A(f(I))) \leq \alpha \cdot \mathsf{OPT}_{\Pi_2}(f(I)) \leq \alpha \cdot \mathsf{OPT}_{\Pi_1}(I),$$

   joten $I \mapsto g(I, A(f(I)))$ on α-approksimointialgoritmi ongelmaan Π_1. Approksimointisuhteen säilyttävä palautus säilyttää siis approksimointisuhteen.

4. Olkoon $G = (V, E)$ verkko, $v \in V$ solmu ja $U_v \subseteq V$ solmun v naapureiden joukko. Joukko $C \subseteq V$ on klikki, jos $(a, b) \in E$ kaikilla $a, b \in C$. Tarkastellaan klikkiongelmaa, jossa pyritään löytämään verkon G suurin klikki, ja osoitetaan se itsepalautuvaksi.

   Verkon G atomeita ovat sen solmut, joten ongelman rakeisuus on vaadittu $O(\log |G|)$. Palautuksen muodostavat funktiot $A(G, v) = G_v = (U_v, E \cap U_v^2)$, $f(G, v, C) = C \cup \{v\}$ ja $g(G, v, r) = r + 1$. Osoitetaan, että luentokalvojen sivuilla 29–30 olevat ehdot täyttyvät näillä funktioilla.

   - Koska $|G_v| < |G|$, ehto 1 täyttyy.
   - Solmun v kanssa yhteensopivia ratkaisuita ovat ne verkon G klikit, jotka sisältävät solmun v. Funktio f on selvästi ehdon 2 mukainen bijektio verkon G_v klikeiltä solmun v sisältäville verkon G klikeille.
   - Olkoot C_1' ja C_2' kaksi verkon G_v klikkiä, $C_1 = f(G, v, C_1')$ ja $C_2 = f(G, v, C_2')$. Koska $\mathsf{obj}(G, C_i) = \mathsf{obj}(G_v, C_i') + 1$, kun $i = 1, 2$, säilyttää funktio f ratkaisuiden C_1' ja C_2' keskinäisen paremmuuden ehdon 3 mukaisesti.
   - Jos verkon G_v suurimmassa klikissä on r solmua, niin verkon G suurimmassa solmun v kanssa yhteensopivassa klikissä on ehdon 4 mukaisesti $g(G, v, r) = r + 1$ solmua.

   Koska funktiot A, f ja g ovat selvästi polynomiaikaisia, on klikkiongelma itsepalautuva.