Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
Harjoitus 5 (22. helmikuuta)
Ratkaisuja (Jouni Siren)

1. Olkoon U perusjoukko ja $\mathcal{S}$ kokoelma sen osamonijoukkoja. Tarkastellaan monijoukkomonipeiteongelmaa

$$\begin{array}{lll} \text{minimoi} & \sum_{S \in \mathcal{S}} \mathsf{cost}(S) \cdot x_S & \\ \text{ehdolla} & \sum_{S : e \in S} M(S,e) \cdot x_S \geq r_e & \text{kaikilla } e \in U \\ & x_S \in \mathbb{N} & \text{kaikilla } S \in \mathcal{S} \end{array}$$

missä $0 \leq M(S,e) \leq r_e$ on alkion e esiintymiskertojen määrä monijoukossa S. Muodostetaan luennoilla (sivut 151–156) esitettyä vastaava ahne algoritmi ja osoitetaan duaalinsovitusmenetelmällä, että se on H_m-approksimointialgoritmi, missä m on suurimman monijoukon koko. Monijoukon koolla tarkoitetaan sen alkioiden esiintymien yhteismäärää.

Algoritmi pitää yllä monijoukkoa C, joka on yhdiste peitteeseen valituista monijoukoista. Olkoon osajoukon S sisältämien vielä peittämättömien esiintymien määrä

$$\mathsf{size}(S \mid C) = \sum_{e \in S} \max(\min(r_e - M(C,e), M(S,e)), 0).$$

Jos peite ei ole vielä valmis, algoritmi määrittää kaikille osajoukoille $S \in \mathcal{S}$ yksikkökustannukset $u(S \mid C) = \mathsf{cost}(S)/\mathsf{size}(S \mid C)$ ja valitsee peitteeseen yksikkökustannukseltaan pienimmän osajoukon. Olkoon $\mathsf{price}(e,i) = u(S \mid C)$ kaikilla niillä $e \in U$ ja $i \leq r_e$, joilla osajoukon S lisääminen peitteeseen peitti alkion e i:nnen kerran. Kun algoritmi pysähtyy, on $\mathsf{price}(e,i)$ määritetty kaikilla e ja i.

Ongelman löysennöksen duaali on

$$\begin{array}{lll} \text{maksimoi} & \sum_{e \in U} r_e y_e & \\ \text{ehdolla} & \sum_{e \in S} M(S,e) \cdot y_e \leq \mathsf{cost}(S) & \text{kaikilla } S \in \mathcal{S} \\ & y_e \geq 0 & \text{kaikilla } e \in U \end{array}$$

Olkoon x ahneen algoritmin tuottama ratkaisu kokonaislukuongelmaan. Määritetään duaalille alustava ratkaisu y', jossa $y'_e = \sum_{i=1}^{r_e} \mathsf{price}(e,i)/r_e$ kaikilla $e \in U$. Nyt

$$\sum_{e \in U} r_e y'_e = \sum_{e \in U} \sum_{i=1}^{r_e} \mathsf{price}(e,i) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \mathsf{cost}(S) \cdot x_S,$$

sillä osajoukon hinta jaetaan sen peittämien esiintymien kesken. Ratkaisuiden x ja y' kustannukset ovat siis samat. Osoitetaan seuraavaksi, että $y = y'/H_m$, missä m on suurimman osajoukon koko, on duaalin käypä ratkaisu, mikä osoittaa ahneen algoritmin H_m-approksimointialgoritmiksi.

Oletetaan ensin, ettei osajoukko S kuulu peitteeseen. Numeroidaan osajoukon esiintymät $e_1, \ldots, e_k$ sen mukaan kuin ne muuttuivat tarpeettomiksi. (Alkion e esiintymiä muuttuu tarpeettomiksi, kun $M(C,e) > r_e - M(S,e)$.) Kun esiintymä e_i tuli tarpeettomaksi, joukossa S oli vielä ainakin $k - i + 1$ tarpeellistä esiintymää. Esiintymän e_i peittäneen osajoukon täytyi olla vähintään yhtä hyvä kuin S, joten $\mathsf{price}(d_i, c_i) \leq \mathsf{cost}(S)/(k - i + 1)$, missä d_i on esiintymää e_i vastaava alkio ja c_i sen peittokerta. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in S} M(S,e)\cdot y_e &= \frac{1}{H_m}\sum_{e\in S} M(S,e)\sum_{i=1}^{r_e}\frac{\mathsf{price}(e,i)}{r_e}\\
&\le \frac{1}{H_m}\sum_{e\in S}\sum_{i=r_e-M(S,e)+1}^{r_e}\mathsf{price}(e,i)\\
&= \frac{1}{H_m}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{price}(d_i,c_i)\\
&\le \frac{\mathsf{cost}(S)}{H_m}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k-i+1}\le \mathsf{cost}(S).
\end{aligned}$$

Toisen rivin epäyhtälö seuraa siitä, että $\mathsf{price}(e,i)\le\mathsf{price}(e,i+1)$ kaikilla $e\in U$ ja $i<r_e$. Kolmannen rivin yhtälö edellyttää, ettei S kuulu peitteeseen, vaan kaikkien sen alkioiden esiintymien hinta määräytyy niiden muuttuessa tarpeettomiksi.

Oletetaan sitten, että osajoukko S kuuluu peitteeseen x_S kertaa, ja tarkastellaan S:n kopiota x_S+1. Edellisen tapauksen perusteella $\sum_{e\in S} M(S,e)\cdot y_e\le\mathsf{cost}(S)$, joten duaalin rajoitteet ovat voimassa kaikilla $S\in\mathcal{S}$.

2. Tarkastellaan muunnelmia monijoukkomonipeiteongelmasta.

   (a) Luovutaan rajoitteesta $M(S,e)\le r_e$ ja osoitetaan, että kokonaislukurako voi kasvaa mielivaltaisen suureksi suhteessa perusjoukon kokoon.

   Olkoon $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ jokin polynomisessa ajassa laskettava funktio. Valitaan perusjoukoksi $U=\{1,\ldots,n\}$ ja osajoukoiksi $S_i=\{i\}$ kaikilla i siten, että $M(S_i,i)=\alpha(n)$. Asetetaan täyttötavoitteeksi $r_i=1$ ja osajoukon kustannukseksi $\mathsf{cost}(S_i)=\alpha(n)/n$ kaikilla i.

   Nyt jokaiseen kokonaislukuarvoiseen ratkaisuun joudutaan valitsemaan mukaan kukin osajoukko S_i ainakin kerran, joten $\mathsf{OPT}=\alpha(n)$. Löysennyksessä riittää kuitenkin asettaa $x_i=1/\alpha(n)$ kaikilla i, jolloin saadaan murtolukuratkaisu, jonka hinta on 1. Kokonaislukurako on siis vähintään $\alpha(n)$.

   (b) Muutetaan rajoite $x_S\in\mathbb{N}$ muotoon $x_S\in\{0,1\}$ ja osoitetaan, että kokonaislukurako voi tässäkin tapauksessa kasvaa mielivaltaisen suureksi.

   Olkoon $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ jokin polynomisessa ajassa laskettava funktio, jolla $\alpha(n)>1$ kaikilla n. Valitaan perusjoukoksi $U=\{1,\ldots,n\}$ ja osajoukoiksi $S_1=S_2=U$ siten, että $M(S_1,i)=\alpha(n)-1$ ja $M(S_2,i)=\alpha(n)$ kaikilla i. Asetetaan $\mathsf{cost}(S_1)=1$, $\mathsf{cost}(S_2)=\alpha(n)$ ja $r_i=\alpha(n)$ kaikilla i.

   Nyt jokainen kokonaislukuratkaisu sisältää monijoukon S_2, joten ratkaisun kustannukseksi tulee vähintään $\alpha(n)$. Murtolukuratkaisun $x_{S_1}=1$ ja $x_{S_2}=1/\alpha(n)$ kustannus on kuitenkin vain 2, joten kokonaislukurako on ainakin $\alpha(n)/2$.

   Ahne algoritmi saavuttaa approksimointisuhteen m, missä m on suurimman osajoukon koko. Oletetaan, että algoritmi ei ole vielä täyttänyt alkion e peittotavoitetta. Olkoon S jokin optimipeitteeseen kuuluva monijoukko, jota algoritmi ei ole vielä valinnut ja jolla $e\in S$. Koska osajoukon S valitseminen peittää ainakin yhden alkion e esiintymistä, on tämän esiintymän yksikkökustannus korkeintaan m kertaa suurempi kuin optimipeitteessä.

3. Tarkastellaan luennoilla (sivut 157–158) esitettyä pyöristämiseen perustuvaa approksimointialgoritmia joukkopeiteongelmaan. Muutetaan algoritmia niin, että osajoukko S valitaan mukaan peitteeseen, jos $x_S>0$. Osoitetaan, että algoritmi on f-approksimointialgoritmi, missä f on suurin perusjoukon alkioiden frekvensseistä osajoukoissa.

   Olkoot x ja y joukkopeiteongelman tapausta vastaavan löysennetyn lineaarisen ohjelman ja sen duaalin optimiratkaisut. Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa:

   (a) $\sum_{S\in\mathcal{S}}\mathsf{cost}(S)\cdot x_S=\sum_{e\in U} y_e$;
   (b) kaikilla $e\in U$: jos $y_e\neq 0$, niin $\sum_{S:e\in S} x_S=1$;
   (c) kaikilla $S\in\mathcal{S}$: jos $x_S\neq 0$, niin $\sum_{e\in S} y_e=\mathsf{cost}(S)$.

Olkoon C algoritmin muodostama peite. Nyt

$$\mathsf{cost}(C) = \sum_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ x_S \neq 0}} \mathsf{cost}(S) \overset{(c)}{=} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ x_S \neq 0}} \sum_{e \in S} y_e \leq f \cdot \sum_{e \in U} y_e \overset{(a)}{=} f \cdot \sum_{S \in \mathcal{S}} \mathsf{cost}(S) \cdot x_S \leq f \cdot \mathsf{OPT},$$

joten algoritmi saavuttaa edelleen approksimointisuhteen f.

4. Tarkastellaan solmupeiteongelman muunnelmaa, jossa verkon solmut on väritetty k eri värillä niin, että naapurisolmut ovat aina eri väriset. Esitetään ongelmaan $(2-2/k)$-approksimointialgoritmi.

   Olkoon solmupeiteongelman tapaus verkko $G = (V, E)$ ja kustannusfunktio cost. Merkitään solmun v väriä $c(v)$. Muodostetaan tapausta vastaava löysennetty lineaarinen ohjelma

$$\begin{array}{lll} \text{minimoi} & \displaystyle\sum_{v \in V} \mathsf{cost}(v) \cdot x_v & \\ \text{ehdolla} & x_u + x_v \geq 1 & \text{kaikilla } (u, v) \in E \\ & x_v \geq 0 & \text{kaikilla } v \in V \end{array}$$

   ja ratkaistaan se. Jos löydetty ratkaisu ei ole kantaratkaisu, etsitään sellainen. Olkoon näin saatu ratkaisu x. Nyt $\sum_{v \in V} \mathsf{cost}(v) \cdot x_v \leq \mathsf{OPT}$.

   Luentojen (sivut 168–170) perusteella tiedetään, että solmupeiteongelman lineaarisen löysennyken kantaratkaisu on puolikokonaislukuarvoinen. Muodostetaan tätä tietoa hyväksi käyttäen ratkaisu C solmupeiteongelmaan.

   Määritetään joukot $U = \{v \in V \mid x_v = 1\}$ sekä $V_i = \{v \in V \mid x_v = 1/2 \text{ ja } c(v) = i\}$, missä $1 \leq i \leq k$. Muodostetut joukot ovat toisistaan erillisiä. Valitaan indeksi j siten, että $\mathsf{cost}(V_j) \geq \mathsf{cost}(V_i)$ kaikilla i, ja asetetaan ratkaisuksi $C = U \cup (\bigcup_{i \neq j} V_i)$. Nyt

$$\begin{aligned} \mathsf{cost}(C) &= \mathsf{cost}(U) + \sum_{i \neq j} \mathsf{cost}(V_i) \\ &\leq \mathsf{cost}(U) + \frac{k-1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathsf{cost}(V_i) \\ &= \mathsf{cost}(U) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathsf{cost}(V_i) + \frac{k-2}{2k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathsf{cost}(V_i) \\ &= \sum_{v \in V} \mathsf{cost}(v) \cdot x_v + \frac{k-2}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{v \in V_i} \mathsf{cost}(v) \cdot x_v \\ &\leq \mathsf{OPT} + \frac{k-2}{k} \cdot \mathsf{OPT} = (2 - 2/k) \cdot \mathsf{OPT}. \end{aligned}$$

   Koska kaikki kaaret ovat eri väristen solmujen välillä, ei verkossa G ole kaaria, jotka olisivat peitteestä pois jätetyn osajoukon V_j solmujen välisiä. Jokaisesta kaaresta $(u, v) \in E$, jolla $x_u > 0$ tai $x_v > 0$, valitaan siis ainakin toinen päätepiste mukaan solmupeitteeseen. Osajoukko C peittää siis kaikki ne solmut, jotka löysennyksen ratkaisu x peittää, joten se on verkon G solmupeite.