Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
Harjoitus 8 (29. maaliskuuta)
Ratkaisuja (Jouni Siren)

1. Muunnetaan luennoilla (sivut 245–254) esitetty 2-approksimointialgoritmi monensuuntaiseen solmuleikkaukseen $(2-2/k)$-approksimointialgoritmiksi.

   Tarkastellaan päätesolmuja s_i vastaavien alueiden reunuksia B_i ja niitä vastaavaa optimaalista murtolukuratkaisua h. Ratkaisu h on puolikokonaislukuarvoinen. Lisäksi $h_v = 1/2$ jos ja vain jos $v \in B_j$ täsmälleen yhdellä arvolla j.

   Merkitään $M^{\text{int}} = \{v \in V \mid h_v = 1\}$ ja $M^{\text{disj}} = \{v \in V \mid h_v = 1/2\}$. Muodostetaan leikkaus $M' = \bigcup_{i \neq j} B_i$, missä B_j on reunuksista se, jolla $|B_j \cap M^{\text{disj}}|$ on suurin. Löytynyt ratkaisu on käypä, sillä se sisältää edelleen ainakin yhden solmun jokaiselta päätesolmujen väliseltä polulta (sivut 253–254). Lisäksi

   $$c(M') \leq c(M^{\text{int}}) + \frac{2k-2}{k} \cdot c(M^{\text{disj}}) \leq \frac{2k-2}{k} \cdot (c(M^{\text{int}}) + c(M^{\text{disj}})) = \frac{2k-2}{k} \cdot \mathsf{OPT}_f,$$

   joten $c(M') \leq \frac{2k-2}{k} \cdot \mathsf{OPT}$.

   Tehtävänannon verkko on tiukka esimerkki approksimointisuhteesta. Siinä $\mathsf{OPT}_f = k$, missä jokaisen sakaran keskellä olevalla solmulla v pätee $d_v = 1/2$. Toisaalta $\mathsf{OPT} = k + \varepsilon$, mikä saadaan valitsemalla leikkaukseen pelkkä keskisolmu. Approksimointialgoritmi valitsee sakaroiden keskellä olevista solmuista $k-1$ kappaletta, joten sen tuottaman leikkauksen kustannukseksi tulee $2k-2$ ja approksimointisuhteeksi siten $(2k-2)/(k+\varepsilon)$.

2. Muodostetaan monihyödykevuolle ja sen duaalille lineaariset ohjelmat, joissa on polynominen määrä rajoitteita. Merkitään jokaisella kaarella $(u,v) \in E$ ja hyödykkeellä $i \in [1,k]$ solmusta u solmuun v kulkevaa vuota $f_i(u,v)$ ja solmusta v solmuun u kulkevaa vuota $f_i(v,u)$. Lisäksi merkitään hyödykkeen i kokonaisvuota f_i.

$$
\begin{array}{llll}
\text{maksimoi} & & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i & \text{(monihyödykevuo)} \\
\text{ehdoilla} & (1) & \displaystyle\sum_{u:(u,v)\in E} (f_i(u,v) - f_i(v,u)) \leq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \text{ ja } v \in V \setminus \{s_i, t_i\} \\
& (2) & f_i - \displaystyle\sum_{u:(s_i,u)\in E} f_i(s_i,u) \leq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \\
& (3) & \displaystyle\sum_{u:(u,t_i)\in E} f_i(u,t_i) - f_i \leq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \\
& (4) & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (f_i(u,v) + f_i(v,u)) \leq c_{u,v} & \text{kaikilla } (u,v) \in E \\
& & f_i(u,v) \geq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \text{ ja } (u,v) \in E \\
& & f_i(v,u) \geq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \text{ ja } (v,u) \in E \\
& & f_i \geq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k
\end{array}
$$

Rajoitteet 1 takaavat sen, että kaikilla hyödykkeillä i solmusta lähtevä vuo on vähintään yhtä suuri kuin siihen tuleva. Rajoitteet 2 merkitsevät vastaavasti, että lähtösolmusta lähtee vähintään kokonaismäärää f_i vastaava vuo. Rajoitteet 3 puolestaan estävät vuon syntymisen tyhjästä edellyttämällä, että maalisolmuun saapuu korkeintaan f_i yksikköä vuota. Rajoitteet 4 takaavat sen, että jokaisella kaarella (u,v) ja kaikilla hyödykkeillä i vuon kokonaismäärä kaarella sen suunnasta riippumatta on korkeintaan kaaren kapasiteetti $c_{u,v}$.

$$
\begin{array}{llll}
\text{minimoi} & & \displaystyle\sum_{e\in E} c_e d_e & \text{(duaali)} \\
\text{ehdoilla} & (1) & d_{u,v} - p_u^i + p_v^i \geq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \text{ ja } (u,v) \in E \\
& (2) & d_{u,v} - p_v^i + p_u^i \geq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \text{ ja } (u,v) \in E \\
& (3) & p_{s_i}^i - p_{t_i}^i \geq 1 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \\
& & p_u^i \geq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \text{ ja } u \in V \\
& & d_e \geq 0 & \text{kaikilla } e \in E
\end{array}
$$

Kaikilla solmuilla v on potentiaali p_v^i jokaisen hyödykkeen i suhteen. Lähtösolmun s_i ja maalisolmun t_i potentiaalieron tulee olla vähintään 1 (rajoitteet 3). Jos kaaren (u,v) pituudeksi on valittu $d_{u,v}$, saa solmujen potentiaaliero olla korkeintaan $d_{u,v}$ yksikköä (rajoitteet 1 ja 2).

Tarkastellaan jotain polkua $s_i \rightsquigarrow t_i$. Koska lähtö- ja maalisolmun potentiaaliero on vähintään 1 ja polulla olevien kaarten yhteispituus on vähintään potentiaalieron verran, on jokainen duaalin käypä ratkaisu myös luentojen sivun 257 ohjelman käypä ratkaisu. Toisaalta sivun 257 ohjelman ratkaisusta saadaan duaalin käypä ratkaisu asettamalla kunkin solmun v potentiaaliksi p_v^i hyödykkeellä i lyhimmän polun $v \rightsquigarrow t_i$ pituus. Ohjelmat ovat siis ekvivalentteja keskenään.

3. Tarkastellaan monileikkauksen mielivaltaista murtolukuoptimiratkaisua d ja joukkoa $D = \{e \mid d_e > 0\}$.

   (a) Olkoon f mielivaltainen monihyödykevuon optimiratkaisu. Jos $d_e > 0$ jollain $e \in E$, pätee komplementaarisuusehtojen takia $\sum_{p:e \in P} f_p = c_e$. Kaari e on siis kyllästetty vuossa f. Käänteinen sen sijaan ei päde. Esimerkiksi seuraavan kohdan verkossa kaikki kaaret ovat kyllästettyjä maksimivuossa, mutta eräässä minimileikkauksessa vain yhdellä kaarella on positiivinen pituus.

   (b) Tarkastellaan verkkoa $G = (V, E)$, missä $V = \{1, \ldots, n\}$ ja verkossa on kaari $(i, i+1)$ kaikilla $i < n$. Asetetaan kunkin kaaren e kapasiteetiksi $c_e = 1$ ja valitaan $s = 1$ ja $t = n$. Eräässä murtolukuarvoisen monileikkauksen optimiratkaisussa jokaisen kaaren pituudeksi tulee $1/(n-1)$, jolloin $D = E$ ja $|D| = n - 1$. Toisaalta mikä tahansa kaari $e \in E$ muodostaa yksin optimaalisen (murtoluku-)monileikkauksen.

4. Olkoon tarkasteltava verkko $G = (V, E)$ ja siinä funktion w mukaiset kaaripainot. Esitetään $O(\log n)$-approksimointialgoritmi verkon kaksijakoistamiselle kaaripainoin palauttamalla ongelma 2CNF≡-klausuulien poisto-ongelmaan.

   Määritetään jokaista solmua $v \in V$ kohti muuttuja p_v, joka on tosi silloin, jos solmu v kuuluu puolelle 1 kaksijakoisessa verkossa. Määritetään jokaista kaarta $(u, v) \in E$ kohti klausuuli $p_u \equiv \overline{p_v}$, jonka painoksi asetetaan $w(u, v)$. Nyt verkko G on kaksijakoinen kaarten $F \subseteq E$ poistamisen jälkeen jos ja vain jos kaikki jäljelle jääneitä kaaria vastaavat klausuulit toteutuvat jollain totuusarvoasetuksella. Lisäksi joukon F kaarten paino on sama kuin niitä vastaavien klausuulien paino. Ongelma voidaan siis ratkaista luennoilla (sivut 275–278) esitetyllä algoritmilla, jolloin approksimointisuhteeksi tulee $O(\log n)$.