Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
Harjoitus 9 (12. huhtikuuta)
Ratkaisuja (Jouni Siren)

1. Osoitetaan, että mitkä tahansa n pistettä metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^k, l_1)$ voidaan kuvata etäisyydet säilyttäen avaruuteen $(\mathbb{R}^m, l_2^2)$ jollain $m \geq k$.

   Olkoon pisteiden joukko P. Muodostetaan bijektiot $f_i : P \to \{1, \ldots, n\}$ kaikilla i siten, että jokainen funktio f_i on kasvava komponentin i suhteen. Lisäksi muodostetaan funktiot $g_i : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, joilla $g_i(j) = f_i^{-1}(j)_i$ kaikilla i ja j. Myös funktiot g_i ovat kasvavia. Etsitty kuvaus on $h : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^{(n-1)k}$, missä $h(x) = (z_1, \ldots, z_k)$ ja

   $$z_i = (\sqrt{g_i(2) - g_i(1)}, \ldots, \sqrt{g_i(f_i(x)) - g_i(f_i(x) - 1)}, 0, \ldots, 0)$$

   kaikilla i.

   Olkoot $x, y \in P$ mielivaltaisia pisteitä. Nyt

   $$||x - y||_1 = \sum_{i=1}^{k} ||x_i - y_i||_1 \quad \text{ja} \quad ||h(x) - h(y)||_2^2 = \sum_{i=1}^{k} ||h(x)_i - h(y)_i||_2^2,$$

   joten riittää tarkastella mielivaltaista komponenttia i. Oletetaan yleisyydestä tinkimättä $f_i(x) < f_i(y)$ ja merkitään $a = h(x)_i$ sekä $b = h(y)_i$. Tällöin

   $$\begin{aligned} ||a - b||_2^2 &= \sum_{j=1}^{n-1} (a_j - b_j)^2 = \sum_{j=f_i(x)}^{f_i(y)-1} b_j^2 = \sum_{j=f_i(x)}^{f_i(y)-1} (g_i(j+1) - g_i(j)) \\ &= g_i(f_i(y)) - g_i(f_i(x)) = y_i - x_i = ||y_i - x_i||_1, \end{aligned}$$

   joten $||x - y||_1 = ||h(x) - h(y)||_2^2$.

2. Approksimointisuhteen säilyttävä palautus tasapainoisesta leikkauksesta mielivaltaisella $b \leq 1/2$ puolitusleikkaukseen (eli tapaukseen $b = 1/2$) saadaan lisäämällä verkkoon uusia solmuja, joihin ei liity yhtään kaarta. Solmuja lisätään n solmun verkkoon m kappaletta niin, että $bn + m = (n + m)/2$.

   Olkoon alkuperäinen verkko G ja lisäysten jälkeinen verkko G'. Nyt jokaista tasapainoista leikkausta $(S, \overline{S})$ verkossa G vastaa kapasiteetiltaan yhtä suuri verkon G' puolitusleikkaus $(S', \overline{S'})$. Tämä saadaan sijoittamalla lisätyt solmut leikkaukseen $(S, \overline{S})$ niin, että kummankin puolen kooksi tulee $(n + m)/2$.

   Toisaalta mielivaltaisesta verkon G' puolitusleikkauksesta $(S', \overline{S'})$ saadaan kapasiteetiltaan yhtä suuri verkon G leikkaus $(S, \overline{S})$ poistamalla siitä kaikki lisätyt solmut. Koska $|S'| = |\overline{S'}| = (n + m)/2$, on verkon G leikkauksen pienemmän puolen koko vähintään $(n + m)/2 - m = bn$ solmua. Kysymyksessä on siis verkon G tasapainoinen leikkaus.

   Koska jokaisesta verkon G tasapainoisesta leikkauksesta saadaan helposti kapasiteetiltaan yhtä suuri verkon G' puolitusleikkaus, ja päinvastoin, on tasapainoisesta leikkauksesta approksimointisuhteen säilyttävä palautus puolitusleikkaukseen.

3. Olkoon (V, d) jokin metriikka ja $n = |V|$. Luennoilla (sivut 293–312) esitettiin metriikan $O(\log n)$-vääristynyt l_1-upotus $O((\log n)^2)$-ulotteiseen avaruuteen. Yleistetään upotus nyt vastaavaksi l_p-upotukseksi mielivaltaisella $p \geq 1$.

   Olkoon Q kohdeavaruuden ulottuvuuksien määrä. Valitaan joukot S_i kaikilla $1 \leq i \leq Q$ vastaavalla tavalla kuin luennoilla. Etsitty upotus on $\sigma_p : V \to \mathbb{R}^Q$, missä $\sigma_p(u) = x$ ja $x_i = d(u, S_i)/Q^{1/p}$.

   Olkoot $u, v \in V$ mielivaltaisia alkioita. Niiden väliseksi etäisyydeksi upotuksessa tulee

   $$\begin{aligned} ||\sigma_p(u) - \sigma_p(v)||_p &= \left(\sum_{i=1}^{Q} \left| \frac{d(u, S_i)}{Q^{1/p}} - \frac{d(v, S_i)}{Q^{1/p}} \right|^p \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{Q} |d(u, S_i) - d(v, S_i)|^p \right)^{1/p} \\ &\geq \left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{Q} |d(u, S_i) - d(v, S_i)| \right) = ||\sigma_1(u) - \sigma_1(v)||_1. \end{aligned}$$

Etäisyys on siis vähintään yhtä suuri kuin tapauksessa $p = 1$. Luennoilla esitetyn mukaisesti kaikkien alkioparien väliset etäisyydet ovat korkeintaan $O(\log n)$ kertaa pienempiä kuin metriikassa d ainakin todennäköisyydellä $1/2$. Riittää siis osoittaa, ettei mikään etäisyys kasva suuremmaksi kuin metriikassa d.

Kolmioepäyhtälöstä seuraa $|d(u, S_i) - d(v, S_i)| \leq d(u, v)$ kaikilla i. Näin ollen

$$||\sigma_p(u) - \sigma_p(v)||_p = \left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{Q} |d(u, S_i) - d(v, S_i)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{Q} d(u, v)^p \right)^{1/p} = d(u, v).$$

Minkään alkioparin välinen etäisyys upotuksessa ei siis ole suurempi kuin metriikassa d.