Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
Harjoitus 10 (19. huhtikuuta)
Ratkaisuja (Jouni Siren)

1. Osoitetaan, että pienimmän puolitusleikkauksen pseudoapproksimointialgoritmin tuottama ratkaisu ei ole välttämättä hyvä ratkaisu (1/3)-tasapainoiseen leikkaukseen.

   (a) Muodostetaan n solmun verkko ja sen leikkaus $(S, \overline{S})$ siten, että $|S| = n/3$. Verkkoon kuuluvat ne kaaret, joiden päät ovat leikkauksessa $(S, \overline{S})$ samalla puolella. Nyt $\mathsf{OPT}_{1/3} = 0$ ja $\mathsf{OPT}_{1/2} = n^2/12$, joten puolitusleikkauksen ja (1/3)-tasapainoisen leikkauksen optimiratkaisut voivat poiketa toisistaan huomattavasti.

   (b) Tarkastellaan n solmun verkkoa, jonka solmut jakautuvat joukkoihin A, B ja C. Oletetaan, että $|A| = n/3 - 1$, $|B| = n^{1/2}$ ja $|C| = 2n/3 + 1 - n^{1/2}$. Joukon A solmuihin ei liity kaaria. Joukot B ja C ovat klikkejä, minkä lisäksi jokaisesta joukon B solmusta on kaari $n^{1/4}$ joukon C solmuun.

   Optimaalisessa (1/3)-tasapainoisessa leikkauksessa pienemmälle puolelle kuuluvat joukon A solmut sekä jokin joukon B solmuista. Näin ollen $\mathsf{OPT}_{1/3} = n^{1/2} + n^{1/4} - 1$. Algoritmi puolestaan valitsee ensin kaikki joukon A solmut, koska niihin ei liity kaaria. Koska leikkaus ei ole vielä riittävän tasapainoinen, joutuu algoritmi täydentämään sitä joukkojen B ja C solmuilla. Seuraavaksi algoritmi etsii osajoukon $W \subset B \cup C$, missä $|W| \leq |B \cup C|/2$ ja osajoukon W kaarilaajentuma on korkeintaan $O(\log n)$ kertaa optimaalista suurempi joukossa $B \cup C$.

   Optimaalinen valinta olisi joukko B, jonka kaarilaajentuma on $n^{1/4}$. Yhdenkin joukon C solmun valitseminen tuottaisi kaarilaajentuman $\Omega(n^{1/2})$, joten täytyy olla $W \subseteq B$. Jos taas $|W| \leq |B|/2$, tulee kaarilaajentumaksi silloinkin $\Omega(n^{1/2})$. Valitun osajoukon $W \subseteq B$ koko on siis $\Theta(n^{1/2})$, joten algoritmin löytämän leikkauksen $(A \cup W, C \cup B \setminus W)$ kooksi tulee $\Omega(n^{3/4})$.

2. Olkoot b ja b' vakioita, $b \leq 1/3$ ja $b < b' \leq 1/2$. Luennoilla (sivu 322) esitettiin algoritmi löytää (1/3)-tasapainoisen leikkauksen, jonka koko on korkeintaan $O(\log n) \cdot \mathsf{OPT}_{1/2}$. Algoritmi yleistyy suoraviivaisesti niin, että se löytää b-tasapainoisen leikkauksen, jonka koko on korkeintaan $O(\log n) \cdot \mathsf{OPT}_{b'}$.

   Kohdan 2 pysähtymisehdoksi tulee $|U| \geq bn$. Todistuksessa (sivut 323–324) tulee lähinnä kiinnittää huomiota siihen, että suorituksen aikana $|V'| \geq (1 - b)n$. Jos siis $(T, \overline{T})$ on pienin b'-tasapainoinen leikkaus, joukkoihin $V' \cap T$ ja $V' \cap \overline{T}$ kuuluu kumpaankin ainakin $(b' - b)n$ solmua. Todistus etenee tältä pohjalta kuten luennoilla.

3. Tarkastellaan metrisen tuotantolaitosten sijoitteluongelman muunnelmaa, jossa jokaisella laitoksella $i \in F$ on avaamiskustannuksen s_i lisäksi lisäkustannus t_i jokaista siihen liitettyä kaupunkia kohti. Muunnelma palautuu luonnollisella tavalla ongelman tavanomaiseen versioon: lisätään jokaiseen yhdistämiskustannukseen c_{ij} vastaava lisäkustannus t_i kaikilla laitoksilla $i \in F$ ja kaupungeilla $j \in C$.

   Osoitetaan, että kolmioepäyhtälö pysyy edelleen voimassa. Olkoot $i, i' \in F$ tuotantolaitoksia ja $j, j' \in C$ kaupunkeja. Koska ongelmaa vastaava verkko on kaksijakoinen, riittää osoittaa, ettei polku $p = j \to i' \to j' \to i$ muutu lyhyemmäksi kuin suora reitti $j \to i$. Alkuperäisestä verkosta tiedetään kolmioyhtälön nojalla $\mathsf{cost}(p) = c_{i'j} + c_{i'j'} + c_{ij'} \geq c_{ij}$. Muunnetussa verkossa taas pätee

   $$\mathsf{cost}'(p) = (c_{i'j} + t_{i'}) + (c_{i'j'} + t_{i'}) + (c_{ij'} + t_i) = \mathsf{cost}(p) + 2t_{i'} + t_i \geq c_{ij} + t_i,$$

   joten kolmioepäyhtälö on edelleen voimassa.

4. Lisätään metriseen tuotantolaitosten sijoitteluongelmaan kapasiteetti u_i jokaiselle tuotantolaitokselle $i \in F$. Rajoite tarkoittaa, että laitokseen i saa kytkeä korkeintaan u_i kaupunkia.

Lineaariseksi ohjelmaksi tulee nyt

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimoi} & \displaystyle\sum_{i\in F, j\in C} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in F} f_i y_i & \\
\text{ehdoilla} & \displaystyle\sum_{i\in F} x_{ij} \geq 1 & \text{kaikilla } j \in C \\
 & \displaystyle u_i y_i - \sum_{j\in C} x_{ij} \geq 0 & \text{kaikilla } i \in F \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} & \text{kaikilla } i \in F \text{ ja } j \in C \\
 & y_i \in \{0,1\} & \text{kaikilla } i \in F
\end{array}
$$

Tarkastellaan kahta laitosta ja n kaupunkia. Laitos 1 on halpa, ja sillä pätee $u_1 = n-1$, $f_1 = 1$ ja $c_{1j} = 1$ kaikilla $j \in C$. Laitos 2 on puolestaan kallis, ja sillä pätee $u_2 = n$, $f_2 = n^2$ ja $c_{2j} = 1$ kaikilla $j \in C$. Optimaalisessa murtolukuratkaisussa $n-1$ kaupunkia kytketään halpaan laitokseen ja viimeinen kaupunki kalliiseen laitokseen, jolle asetetaan $y_2 = 1/n$. Optimaalisessa kokonaislukuratkaisussa taas kallis laitos on pakko ottaa käyttöön kokonaan, jolloin kaikki kaupungit voidaan kytkeä siihen. Niinpä $\mathsf{OPT}_f = 2n+1$ ja $\mathsf{OPT} = n^2 + n$.