

582456 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)

Harjoitus 2 (1. helmikuuta)

1. (Vazirani 2.1) *Lukumääräisessä maksimileikkausongelmassa* on annettu verkko $G(V, E)$, ja tehtävänä on löytää sellainen solmujoukon V ositus joukkoihin A ja B , että mahdollisimman monen kaaren päätepisteet tulevat eri joukkoihin. Olkoon $d(X, Y)$ niiden kaarten lukumäärä, joiden toinen päätepiste on joukossa X ja toinen joukossa Y . Tavoitteena on siis maksimoida $d(A, B)$. Tarkastellaan seuraavaa algoritmia:

- Alusta $A = \{v_1\}$ ja $B = \{v_2\}$, missä solmut v_1 ja v_2 on valittu mielivaltaisesti.
- Toista kaikilla $v \in V - \{v_1, v_2\}$:
jos $d(\{v\}, A) \geq d(\{v\}, B)$ niin $B \leftarrow B \cup \{v\}$;
muuten $A \leftarrow A \cup \{v\}$
- Tulosta (A, B) .

Osoita, että kysymyksessä on $1/2$ -approksimointialgoritmi. Millaisella ylärajalla arvioit optimikustannusta OPT ? Anna tiukka esimerkki (ts. esimerkki joka osoittaa, että algoritmi ei voi taata tämän parempaa approksimointisuhdetta). Yleistä ongelmaa ja algoritmi painotetuille verkoille.

2. (Vazirani 2.2) Tarkastellaan edelleen lukumääräistä maksimileikkausongelmaa. Jos on annettu solmujoukon ositus (A, B) , niin solmun v *vaihto* siirtää sen joukosta A joukkoon B tai päinvastoin. Tarkastellaan seuraavaa *paikallista etsintäalgoritmia*:

- Alusta mielivaltainen ositus (A, B) .
- Jos mikään vaihto ei kasvata funktiota $d(A, B)$, tulosta (A, B) ja lopeta.
- Suurita jokin vaihto, joka kasvattaa funktiota $d(A, B)$, ja jatka kohdasta (b).

Osoita, että algoritmi päättyy aina polynomisessa ajassa ja takaa approksimointisuhteen $1/2$.

3. (Vazirani 2.10) Todetaan ensin, että ahneen joukkopeiteongelman approksimointisuhteelle on mahdollista johtaa tarkempi yläraja H_k , missä H_k on suurimman yksittäisen osajoukon alkioiden lukumäärä. Osoita esimerkillä, että algoritmille ei voi todistaa tämän parempaa approksimointisuhdetta edes lukumääräisessä tapauksessa (ts. kun jokaisen osajoukon paino on 1).

Vihje: tarkastele tapauksia, joissa jokainen solmu kuuluu tasan kahteen joukkoon.

Vihje 2: jos tehtävä edelleen tuntuu vaikealta, tiukan esimerkin voi etsiä esim. alkuperäisartikkelista

D. S. Johnson: Approximation algorithms for combinatorial problems. *Journal of Computer and System Sciences* 9:256–278, 1974.

4. (Vazirani 2.13) Esitä joukkopeiteongelmalle kerrostamistekniikkaan perustuva algoritmi, jonka approksimointisuhde on perusjoukon alkioiden frekvenssien maksimi. Anna tiukka esimerkki.