582456 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
Harjoitus 3 (8. helmikuuta)

1. (Vazirani 3.3) Osoita, että seuraavaan *suunnattuun Steiner-puuongelmaan* on approksimaation säilyttävä palautus joukkopeiteongelmasta (joten tätä ongelmaa ei luultavasti voi approksimoida paremmalla suhteella kuin $O(\log n)$):

   Annettu: suunnattu verkko $G = (V, E)$; kaarten painot; solmujen ositus pakollisiin ja Steiner-solmuihin; erityisasemaan asetettu pakollinen solmu r (juuri)

   Löydettävä: painoltaan pienin puu, jonka juuri on r ja joka sisältää kaikki pakolliset solmut sekä vapaasti valittavissa olevan joukon Steiner-solmuja.

   Vihje: aseta joukkoja vastaamaan Steiner-solmut ja alkioita vastaamaan muut pakolliset solmut kuin r.

2. (Vazirani 3.4) Tarkastellaan metrisen kauppamatkustajan ongelman muunnelmaa, jossa pienimmän Hamiltonin kehän sijaan pitää löytää pienin Hamiltonin polku; ts. kauppamatkustajan reitin alku- ja loppusolmu eivät ole samat. Ongelmasta voidaan edelleen erottaa kolme alimuunnelmaa sen mukaan, onko polun päätepisteistä kiinnitetty kumpikin, toinen vai ei kumpaakaan. Osoita, että

   (a) tapauksessa, jossa on kiinnitetty toinen päätepiste tai ei kumpaakaan, ongelmalla on $3/2$-approksimointialgoritmi

   (b) tapauksessa, jossa on kiinnitetty kumpikin päätepiste, ongelmalla on $5/2$-approksimointialgoritmi.

   (J. A. Hoogeveen. Analysis of Christofides' heuristic: some paths are more difficult than cycles. *Operations Research Letters* 10:291–295, 1991.)

3. (Vazirani 5.1) Osoita, että jos ei oleteta kolmioepäyhtälöä, niin k-keskusongelmalle ei ole $\alpha(n)$-approksimointialgoritmia millään polynomisessa ajassa laskettavalla α.

   Vihje: Yhdistele kauppamatkustajan ja metrisen k-keskusongelman approksimoitumattomuustodistuksia.

4. (Vazirani 5.13) Tarkastellaan *metristä k-ryväsongelmaa* (metric k-cluster):

   Annettu: verkko $G = (V, E)$; kaarten painot, jotka toteuttavat kolmioepäyhtälön; luonnollinen luku k

   Löydettävä: solmujoukon V ositus $V_1, \ldots, V_k$, jolla suurin samaan osaan kuuluvan solmuparin etäisyys

   $$\max_{1 \le i \le k} \max_{u,v \in V_i} \mathrm{cost}(u, v)$$

   on mahdollisimman pieni.

   (a) Anna ongelmalle 2-approksimointialgoritmi ja algoritmillesi tiukka esimerkki.

   (b) Osoita, että jos $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, niin ongelmaa ei voi approksimoida suhteella $2 - \varepsilon$ millään $\varepsilon > 0$.

   Mahdottomuustuloksen todistuksessa voit käyttää hyväksesi tietoa, että seuraava *klikkeihinositusongelma* (CLIQUE COVER) on NP-täydellinen:

   Annettu: verkko $G = (V, E)$; luonnollinen luku k

   Kysymys: onko solmujoukolla V olemassa sellainen ositus $V_1, \ldots, V_k$, että kullakin i solmujoukon V_i virittämä verkon G osaverkko on täydellinen (eli klikki).