

582456 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)

Harjoitus 4 (15. helmikuuta)

1. Tarkastellaan ahneita algoritmeja repunpakkaukseen. Oletetaan, että n esinettä ovat a_1, \dots, a_n tuotto-suhteen $\text{profit}(a)/\text{size}(a)$ mukaan pienenevässä järjestyksessä. Olkoon k pienin indeksi, jolla alkoioiden a_1, \dots, a_k yhteenlaskettu koko ylittää repun koon B .
 - (a) (Vazirani 8.1) Ahneen algoritmin perusversio valitsee joukon $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Osoita, että tämä voi johtaa mielivaltaisen huonoon approksimaatiosuhteeseen.
 - (b) (Vazirani 8.2) Muokataan ahnetta algoritmia niin, että se valitsee paremman joukoista $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ ja $\{a_k\}$. Osoita, että tämä takaa approksimaatiosuhteen $1/2$.
2. (Vazirani 8.3) Esitä täysin polynominen approksimointiskeema seuraavalle *osajoukkosumman suhde*-ongelmalle:

Tapaus: n positiivista kokonaislukua $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Käyvät ratkaisut: erilliset epätyhjät osajoukot $S_1 \subseteq \{1, \dots, n\}$ ja $S_2 \subseteq \{1, \dots, n\}$, joilla

$$\sum_{i \in S_1} a_i \geq \sum_{i \in S_2} a_i$$

Minimoitava suhde

$$\frac{\sum_{i \in S_1} a_i}{\sum_{i \in S_2} a_i}$$

Lähde: Cristina Bazgan, Miklos Santha and Zsolt Tuza. Efficient approximation algorithms for the subset-sum problem. *Journal of Computer and System Sciences* 64(2):160–170, 2002. <http://dx.doi.org/10.1006/jcss.2001.1784>

3. (Vazirani 9.2) Tarkastellaan laatikonpakkaukseen First-Fit-algoritmin rajoitetumpaa versiota, joka yrittää sijoittaa uutta esinettä vain viimeksi käyttöönotettuun vajaan laatikkoon. Jos siihen ei mahdu, otetaan käyttöön uusi laatikko. Vanhoihin laatikoihin ei siis enää palata, vaikka niissä olisikin tilaa.
Osoita, että tämäkin algoritmi takaa approksimointisuhteen 2. Anna tiukka esimerkki.
4. (Vazirani 12.4) Tarkastellaan joukkopeiteongelmasta löysennettyä lineaarista ohjelmaa ja sen duaalia (luennot s. 137 ja 139; Vazirani yhtälöt (13.2) ja (13.3)). Olkoot x ja y primaalin ja duaalin käypiä ratkaisuja, jotka toteuttavat luentojen lauseen 3.3 (s. 123) ehdot (Vazirani Theorem 12.3, complementary slackness conditions). Osoita suoraan näitä ehtoja käyttäen, että ratkaisujen x ja y kohdefunktiot todella saavat samat arvot.

Vihje: Jos ajatellaan, että jokainen alkio e antaa joukolle S maksun $y_e x_S$, niin joukon S saama maksu on yhteensä $c(S)x_S$.