

582456 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)

Harjoitus 7 (22. maaliskuuta)

1. (Vazirani 19.6) Tarkastellaan monensuuntaisen leikkauksen pyöristysvaiheeseen erikoistapauksessa $k = 3$ luennolla esitetyn (luennot s. 238, Vazirani Algorithm 19.4) sijaan seuraavaa algoritmia:

Valitse satunnaiset ρ_1 ja ρ_2 toisistaan riippumatta tasaisesti väliltä $(0, 1)$. Aseta kolme dimensiota satunnaiseen järjestykseen (i, j, k) . Joukkoon V_i valitaan solmut v , joilla $x_v^i \geq \rho_1$. Muista solmuista v joukkoon V_j valitaan ne, joilla $x_v^i + x_v^j/2 \geq \rho_2$. Loput jäävät joukkoon V_3 .

Osoita, että algoritmi saavuttaa odotusarvoisesti approksimointisuhteen $7/6$.

2. (Vazirani 19.8) Luennolla esitetty $(2 - 2/k)$ -approksimointi monensuuntaiseen leikkaukseen (luennot s. 224, Vazirani Algorithm 4.3) voidaan melko ilmeisellä tavalla muuntaa ratkaisemaan monensuuntainen solmuleikkauksongelma. Osoita, että saatavan algoritmi ei kuitenkaan saavuta mitään vakioapproksimointisuhdetta. Mikä on paras yläraja, jonka saat approksimointisuhteelle?
3. (Vazirani 19.10) Tarkastellaan monensuuntaisen solmuleikkauksen lineaarista löysennökselle (s. 246, Vazirani (19.2)) duaalin muodostavaa vuo-ohjelmaa (s. 248, Vazirani (19.3)). Osoita, että (kokonaisluokarvoinen) pienin monensuuntainen solmuleikkaus voi olla $2 - 2/k$ kertaa niin suuri kuin maksimivuo. (Siis tällä lineaarisella ohjelmalla saatava alaraja minimileikkaukselle voi olla kertoimen $2 - 2/k$ päässä todellisesta optimista.)
4. (Vazirani 19.13) Tarkastellaan kahta variaatiota *osajoukkotakaisinkytkentäongelmasta*. Kummassakin versiossa on annettu suuntaamaton verkko $G = (V, E)$ ja joukko *kiinnostavia* solmuja $S \subseteq V$. Verkon G sykli on kiinnostava, jos se sisältää ainakin yhden kiinnostavan solmun.

Osajoukkotakaisinkytkentäongelmassa kaarille on annettu lisäksi kaarten painofunktio $w: E \rightarrow \mathbb{Q}_+$. Tehtävänä on löytää painoltaan pienin *osajoukkotakaisinkytkentäkaarijoukko* (subset feedback edge set) eli kaarijoukko, joka sisältää ainakin yhden kaaren jokaisesta kiinnostavasta syklistä.

Osajoukkotakaisinkytkentäongelmassa solmuille on annettu lisäksi ei-kiinnostavien solmujen painofunktio $w: V - S \rightarrow \mathbb{Q}_+$. Tehtävänä on löytää painoltaan pienin *osajoukkotakaisinkytkentäsolmujoukko* (subset feedback vertex set) eli ei-kiinnostavien solmujen joukko, joka sisältää ainakin yhden solmun jokaisesta kiinnostavasta syklistä.

Osoita, että

- (a) monensuuntaisesta leikkauksesta on approksimointisuhteen säilyttävä palautus osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan kaarille (*Vihje*: tarkastele tapausta $|S| = 1$)
- (b) osajoukkotakaisinkytkentäongelmasta kaarille on approksimointisuhteen säilyttävä palautus osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan solmuille.