582456 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
Harjoitus 9 (12. huhtikuuta)

Koska harvimman leikkauksen teorian käsitteleminen luennoilla on kestänyt hieman odotettua kauemmin, tällä kertaa tehtäviä on hieman vähemmän ja ne sivuavat hieman aiheita, jotka käsitellään tarkemmin vasta perjantain luennolla.

Nyt alkaisi myös olla aika ruveta miettimään sopivaa artikkelia esityksesi aiheeksi. Katso aihe-ehdotuksia kurssin kotisivulta.

1. (Vazirani 21.2) Osoita, että mitkä tahansa n pistettä metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^k, \ell_1)$ voidaan kuvata etäisyydet säilyttäen avaruuteen $(\mathbb{R}^m, \ell_2^2)$ jollain $m \geq k$. Maalipuolella siis pisteiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ etäisyydeksi määritellään $\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2$ (joka ei toteuta kolmioepäyhtälöä).

   Vihje: Koska ℓ_1 ja ℓ_2^2 ovat additiivisia eri ulottuvuuksien suhteen, ongelma palautuu tapaukseen $k = 1$. Olkoon pisteet suuruusjärjestyksessä $x_1, \dots, x_n$. Kuvaa $x_i \in \mathbb{R}$ pisteeseen $(\sqrt{x_2 - x_1}, \dots, \sqrt{x_i - x_{i-1}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

2. (Vazirani 21.5) Osoita, että tasapainoinen leikkaus mielivaltaisella $b \leq 1/2$ (luennot s. 321, Vazirani Problem 21.27) voidaan palauttaa puolitusleikkaukseen (tapaus $b = 1/2$) approksimaatiosuhde säilyttäen.

3. (Vazirani 21.6) Osoita, että millä tahansa $p \geq 1$ metriikalla $(V, \boldsymbol{d})$, missä $|V| = n$, on $O(\log n)$-vääristynyt ℓ_p-upotus $O((\log n)^2)$-ulotteiseen avaruuteen.

   Vihje: Suurin osa tästä menee aivan kuten kurssilla käsitelty tapaus $p = 1$. Nyt kuitenkin solmu $v \in V$ kuvataan pisteeseen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^Q$, missä $x_i = d(v, S_i)/Q^{1/p}$. Tarvitset taas tietoa $|d(u, S_i) - d(v, S_i)| \leq d(u, v)$ ja lisäksi tietoa, että

   $$\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

   on parametrin p suhteen kasvava.

   Lähdeartikkeli: Nathan Linial, Eran London and Yuri Rabinovich. The geometry of graphs and some of its algorithmic applications. *Combinatorica* 15(2):215–245, June 1995. `http://dx.doi.org/10.1007/bf01200757`.