

582456 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)

Harjoitus 11 (26. huhtikuuta)

Yhteinen vihje tehtäviin 2 ja 3: katso alkuperäisartikkelia

Kamal Jain and Vijay V. Vazirani. Approximation algorithms for metric facility location and k -median problems using the primal-dual schema and Lagrangian relaxation. *Journal of the ACM* 48(2):274–296, March 2001. <http://doi.acm.org/10.1145/375827.375845>

johon kirjan luvut 24 ja 25 perustuvat.

1. (Vazirani 24.2) Muutetaan laitostensijoitteluongelman algoritmia siten, että vaiheessa 2 (luennot s. 340) laitetaan verkkoon H kaari (i, i') , jos jollain j kaaret (i, j) ja (i', j) ovat tiukkoja (siis ei välttämättä erityisiä). Osoita, että luentojen lemma 3.76 (jonka mukaan $c_{ij} \leq 3\alpha_j^e$) ei enää päde. Korjaa algoritmia niin, että analyysi taas pätee.

Vihje: numeroi laitoksen niiden tilapäisen avaamisen aikajärjestyksessä ja valitse verkossa H leksikografisesti ensimmäinen maksimaalinen riippumaton joukko.

2. (Vazirani 24.9) Tarkastellaan tuotantolaitosten sijoitteluongelman versiota, jossa tuotantolaitoksella i on kapasiteetti u_i kuten harjoituksen 10 tehtävässä 4. Nyt lisäksi saman laitoksen saa avata useita kertoja. Jos laitos i on avattu y_i kertaa, se voidaan yhdistää $u_i y_i$ kaupunkiin. Esitä kokonaislukuohjelma ja sen lineaarinen löysennös ja duaali. Muokkaa luentojen algoritmi antamaan vakioapproksimaatio tälle ongelmalle.
3. (Vazirani 25.6) Ryvästysongelmassa on annettu pisteet $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^d$ ja ryvästen lukumäärä k . Tehtävänä on valita k ryväskeskipeistettä $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k \in \mathbb{R}^d$ siten, että kustannus

$$\sum_{i=1}^n d(\mathbf{v}_i, \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k\})$$

minimoituu, missä

$$d(\mathbf{v}_i, \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k\}) = \min_{1 \leq j \leq k} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{f}_j\|_2^2$$

on pisteen \mathbf{v}_i neliöity euklidinen etäisyys lähimmästä ryväskeskipeestä.

Esitä ongelmalle vakioapproksimaatioalgoritmi.

4. (Vazirani 29.2) Osoita, että $\text{PCP}(\log n, \text{poly}(n)) \subseteq \text{NP}$. Päättele tästä (PCP-teoreemaa käyttäen), että $\text{PCP}(\log n, 1) = \text{PCP}(\log n, \text{poly}(n))$.

Vihje: Arvaa todistus epädeterministisesti ja simuloi todistuksen tarkastajaa kaikilla mahdollisilla satunaisjonoilla.