**582465 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)**

1. kurssikoe, ratkaisuja (Jyrki Kivinen)

1. (a) Käytetään kahta konetta ja valitaan suoritusajoiksi $1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3$. Optimaalinen valmistusaika on 1, mutta algoritmi päätyy valmistusaikaan $1/2 + 1/3 + 1/3 = 7/6$. Siis approksimointisuhde on ainakin $7/6$. Jos halutaan ääretön jono tapauksia, joilla kaikilla approksimointisuhde ainakin $7/6$, voidaan yksinkertaisesti laittaa tästä suoritusaikojen jonosta $m$ kopiota $2m$ koneelle.

   (b) Olkoon optimikustannus $r$. Osoitetaan, että ahneen algoritmin tuottama kustannus on korkeintaan $3r/2$. Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Tarkastellaan ensimmäistä työtä, joka sijoitetaan siten, että jollekin koneelle tulee valmistusajaksi yli $3r/2$.

   Kyseinen työ sijoitettiin ahneen algoritmin mukaisesti koneelle, jolla siihen asti sijoitettujen töiden valmistusaika oli pienin. Koska valmistusaikojen summa on (algoritmin ollessa kesken) pienempi kuin $mr$, niistä pienin on pienempi kuin $r$. Siis nyt sijoitettava työ, joka kasvattaa valmistusajaksi yli $3r/2$, on suoritusajaltaan suurempi kuin $r/2$.

   Koska työt sijoitetaan suoritusajan mukaan laskevassa järjestyksessä, myös kaikki aiemmin sijoitetut työt ovat suoritusajaltaan suurempia kuin $r/2$. Jos aiemmin jokaiseen koneeseen on sijoitettu ainakin yksi työ, tehtävässä on useampi kuin $m$ työ, jonka suoritusaika on yli $r/2$, joten valmistusaika on suurempi kuin $r$; ristiriita. Jos taas jokin kone on vielä tyhjä, niin käsilläoleva työ voidaan sijoittaa sinne, jolloin koneen suoritusaika ei kasva suuremmaksi kuin $r$; ristiriita tässäkin.

   Viite approksimointisuhteeseen $4/3$:

   R. L. Graham. Bounds on Multiprocessing Timing Anomalies. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17(2):416–429, March 1969. `http://dx.doi.org/10.1137/0117039`

2. Luennot s. 96–100; Vazirani s. 69–70.

3. (a) Kokonaislukuohjelman muuttujat ovat $x_v$, missä $v \in V$, ja itse ohjelma

$$\begin{array}{lll} \text{maksimoi} & \sum_{v \in V} c_v x_v & \\ \text{ehdolla} & x_u + x_v \le 1 & \text{kaikilla } (u, v) \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} & \text{kaikilla } v \in V. \end{array}$$

   Löysennöksessä ehto $x_v \in \{0, 1\}$ korvautuu ehdolla $0 \le x_v \le 1$, mistä ehto $x_v \le 1$ voidaan turhana jättää pois. Duaalin muuttujiksi tulee $y_e$, missä $e \in E$. Olkoon $E_v$ niiden kaarten joukko, joilla toinen päätepiste on $v$. Duaaliksi tulee

$$\begin{array}{lll} \text{minimoi} & \sum_{e \in E} y_e & \\ \text{ehdolla} & \sum_{e \in E_v} y_e \ge c_v & \text{kaikilla } v \in V \\ & y_e \ge 0 & \text{kaikilla } e \in E. \end{array}$$

   (b) Valitaan täydellisessä verkossa $c_v = 1$ kaikilla $v$. Täydellisessä verkossa vain yhden solmun joukko voi olla riippumaton, joten kokonaislukuongelman optimiarvo on 1. Toisaalta löysennökselle saadaan käypä ratkaisu asettamalla $x_v = 1/2$ kaikilla $v$, ja tämän ratkaisun kustannus on $|V|/2$. Siis approksimointisuhde voi mielivaltaisella $n = |V|$ olla niinkin pieni kuin $2/n$.