582465 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
1. kurssikoe 1.3. kello 16–19 auditorio A111
vastuuhenkilö Jyrki Kivinen

Vastaa kaikkien tehtävien kaikkiin kohtiin. Kokeen maksimipistemäärä on 20 pistettä. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä.

1. [*8 pistettä*] *Samanlaisten koneiden skeduloinnissa* on annettu töiden joukko J, koneiden joukko M ja jokaiselle työlle $j \in J$ sen suoritusaika $p_j \in \mathbb{Z}_+$. Tehtävänä on jakaa työt koneille niin, että valmistusaika on pienin mahdollinen. Toisin sanoen pitää muodostaa joukot J_i, $i \in M$, missä $\cup_{i \in M} J_i = J$ ja

   $$\max_{i \in M} \sum_{j \in J_i} p_j$$

   minimoituu.

   Tarkastellaan ahnetta algoritmia, joka sijoittaa työt suoritusajan mukaan laskevassa järjestyksessä aina vähiten kuormitettuun koneeseen.

   (a) Osoita algoritmin approksimointisuhteelle mikä tahansa ykköstä suurempi vakioalaraja.

   (b) Osoita, että algoritmi on $\frac{3}{2}$-approksimointialgoritmi.

   Lisätieto: Itse asiassa kyseinen algoritmi on $\frac{4}{3}$-approksimointialgoritmi, ja tämä raja on tiukka.

2. [*6 pistettä*] Esitä repunpakkausongelmalle pseudopolynominen tarkka algoritmi sekä täysin polynominen approksimointiskeema.

   Muistin virkistykseksi: Repunpakkausongelmassa on annettu joukko esineitä $S = \{ a_1, \dots, a_n \}$, jokaiselle esineelle $a \in S$ sen koko $\mathrm{size}(a) \in \mathbb{Z}_+$ ja tuotto $\mathrm{profit}(a) \in \mathbb{Z}_+$ sekä repun koko $B \in \mathbb{Z}_+$. Tehtävänä on valita esinejoukko $R \subseteq S$ siten, että kokonaistuotto $\mathrm{profit}(R) = \sum_{a \in R} \mathrm{profit}(a)$ maksimoituu, kun joukon koko $\mathrm{size}(R) = \sum_{a \in R} \mathrm{size}(a)$ saa olla korkeintaan B. Voit olettaa, että $\mathrm{size}(a) \le B$ kaikilla $a \in S$.

3. [*6 pistettä*] Verkon $G = (V, E)$ solmujoukko $U \subseteq V$ on *riippumaton*, jos minkään kahden joukkoon U kuuluvan solmun välillä ei ole kaarta. Oletetaan lisäksi, että solmuille $v \in V$ on annettu painot $c_v \in \mathbb{Q}_+$, ja tarkastellaan kokonaispainoltaan suurimman riippumattoman joukon etsimistä. Tunnetusti tämä on NP-kova ongelma jo erikoistapauksessa $c_v = 1$ kaikilla v.

   (a) Esitä ongelma lineaarisena kokonaislukuohjelmana. Muodosta ohjelmalle löysennös ja sen duaali.

   (b) Osoita, että kokonaislukuohjelman ja sen löysennöksen optimiarvojen suhdetta ei voi rajoittaa alhaalta millään vakiolla.