Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
2. kurssikoe
Ratkaisuja (Jouni Siren)

1. Tehtävän ratkaisu on esitetty luennoilla (sivut 280–288).

   (a) Merkitään päätesolmuparin (s_i, t_i) välisten polkujen joukkoa $\mathcal{P}_i = \{q^i_j\}$.

$$\begin{array}{lll}
\text{maksimoi} & f & \text{(kokonaislukuohjelma)} \\
\text{ehdoilla} & \sum_j f^i_j \geq f \cdot \mathrm{dem}(i) & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k \\
 & \sum_{i,j:e \in q^i_j} f^i_j \leq c_e & \text{kaikilla } e \in E \\
 & f \in \mathbb{N} & \\
 & f^i_j \in \mathbb{N} & \text{kaikilla } i, j
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{minimoi} & \sum_{e \in E} c_e d_e & \text{(duaali)} \\
\text{ehdoilla} & \sum_{e \in q^i_j} d_e \geq l_i & \text{kaikilla } i, j \\
 & \sum_{i=1}^{k} l_i \cdot \mathrm{dem}(i) \geq 1 & \\
 & d_e \geq 0 & \text{kaikilla } e \in E \\
 & l_i \geq 0 & \text{kaikilla } 1 \leq i \leq k
\end{array}$$

   (b) Duaalin optimiratkaisu voidaan valita niin, että $\mathbf{d}$ toteuttaa kolmioepäyhtälön, $l_i = d_{(s_i,t_i)}$ kaikilla i ja $\sum_i d_{(s_i,t_i)} \cdot \mathrm{dem}(i) = 1$:

      i. Jos joillain solmuilla u, v, w pätee $d_{uw} > d_{uv} + d_{vw}$, tehdään sijoitus $d_{uw} \leftarrow d_{uv} + d_{vw}$. Ratkaisu pysyy edelleen käypänä eikä kohdefunktion arvo ainakaan kasva.
      ii. Jos $d_{(s_i,t_i)}$ on lyhimmän polun $s_i \rightsquigarrow t_i$ pituus, voidaan asettaa $l_i \leftarrow d_{(s_i,t_i)}$.
      iii. Jos $\sum_i d_{(s_i,t_i)} \cdot \mathrm{dem}(i) = \beta > 1$, pysyy ratkaisu käypänä jakamalla kaikkien muuttujien arvot vakiolla β. Samalla kohdefunktion arvo pienenee aidosti.

   Olkoon f^* primaalin lineaarisen löysennöksen maksimituotanto. Yhtälössä

$$f^* = \min_{\mathbf{d}} \frac{\sum_{e \in E} c_e d_e}{\sum_i d_{(s_i,t_i)} \cdot \mathrm{dem}(i)} \tag{1}$$

   metriikan $\mathbf{d}$ mukaiset etäisyydet voidaan kertoa millä tahansa positiivisella vakiolla muuttamatta yhtälön voimassaoloa. Yhtälö voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$f^* = \min_{\mathbf{d}} \sum_{e \in E} c_e d_e, \tag{2}$$

   missä minimointi tapahtuu yli metriikoiden, joilla ehto

$$\sum_i d_{(s_i,t_i)} \cdot \mathrm{dem}(i) = 1 \tag{3}$$

   on voimassa.

   Olkoon $\mathbf{d}$ se ehdon 3 toteuttava metriikka, joka minimoi duaalin kohdefunktion. Metriikasta saadaan duaalin käypä ratkaisu sijoituksella $l_i \leftarrow d_{(s_i,t_i)}$ kaikilla i (kohta ii). Koska aiemmin todetun mukaisesti duaalin optimiratkaisun voidaan olettaa toteuttavan kolmioepäyhtälön, on $(\mathbf{d}, \mathbf{l})$ on optimiratkaisu. Se toteuttaa siis yhtälön 2 ja siten myös yhtälön 1.

Kohdassa (a) primaalista ja duaalista sai kummastakin 2 pistettä. Kohdasta (b) sai 4 pistettä.

2. Sama tehtävä oli myös harjoitusten 7 tehtävä 4.

   (a) Muodostetaan approksimointisuhteen säilyttävä palautus monensuuntaisesta leikkauksesta osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan kaarille. Palautus tapahtuu lisäämällä verkkoon uusi solmu s, josta tulee verkon ainoa kiinnostava solmu. Lisäksi verkkoon tulee kaikilla i kaari (s, s_i), jonka painoksi tulee ∞.

   Olkoot $s_i \neq s_j$ kaksi päätesolmua. Jokaista alkuperäisen verkon polkua $s_i \rightsquigarrow s_j$ vastaa uuden verkon kiinnostava sykli $s_i \rightsquigarrow s_j \to s \to s_i$, ja päinvastoin. Jokainen alkuperäisen verkon monensuuntainen leikkaus on siis käypä ratkaisu osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan uudessa verkossa. Vastaavasti jokainen painoltaan äärellinen osajoukkotakaisinkytkentäongelman käypä ratkaisu on monensuuntainen leikkaus alkuperäisessä verkossa. Näin ollen palautus säilyttää approksimointisuhteen.

   (b) Muodostetaan approksimointisuhteen säilyttävä palautus osajoukkotakaisinkytkentäongelmasta kaarille (A) osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan solmuille (B). Asetetaan alkuperäisen verkon kaikkien ei-kiinnostavien solmujen painoksi ∞. Korvataan alkuperäisen verkon jokainen kaari (u, v) kaarilla $(u, w_{u,v})$ ja $(w_{u,v}, v)$, missä $w_{u,v}$ on uusi solmu, johon ei liity muita kaaria. Asetetaan tämän solmun painoksi uudessa verkossa kaaren (u, v) paino alkuperäisessä verkossa.

   Nyt jokainen ongelman A käypä ratkaisu alkuperäisessä verkossa voidaan muuttaa kokonaispainoltaan samaksi ongelman B ratkaisuksi uudessa verkossa. Tämä tapahtuu valitsemalla ongelman B ratkaisuun solmu $w_{u,v}$, jos kaari (u, v) kuuluu ongelman A ratkaisuun. Sama toimii myös toiseen suuntaan, jos ongelman B ratkaisu on painoltaan äärellinen. Näin ollen kysymyksessä on approksimointisuhteen säilyttävä palautus.

   Tehtävän kummastakin osasta saattoi saada 3 pistettä.

3. Olkoon f palautus SAT-ongelmasta MAX-3SAT-ongelmaan niin, että kaikilla kaavoilla φ pätee

   - jos $\varphi \in \mathsf{SAT}$, niin $\mathsf{OPT}(f(\varphi)) = m$;
   - jos $\varphi \notin \mathsf{SAT}$, niin $\mathsf{OPT}(f(\varphi)) < (1 - \varepsilon)m$,

   missä m on kaavan $f(\varphi)$ klausuulien määrä ja $\varepsilon > 0$ jokin vakio. Osoitetaan, että tällöin $\mathsf{SAT} \in \mathsf{PCP}(\log n, 1)$.

   Olkoon $k \in \mathbb{N}$ jokin sellainen vakio, jolla $(1 - \varepsilon)^k < 1/2$. Muodostetaan ongelmalle SAT $\mathsf{PCP}(\log n, 1)$-tarkastaja, joka valitsee kaavasta $f(\varphi)$ satunnaisesti k eri klausuulia ja tarkistaa kaavan φ todistuksesta niihin kuuluvien muuttujien totuusarvot. Klausuulien valintaan tarvitaan noin $k \log m$ eli $O(\log n)$ satunnaisbittiä, ja todistuksesta tarkistetaan korkeintaan $3k$ eli $O(1)$ muuttujan totuusarvot.

   Jos $\varphi \in \mathsf{SAT}$, on olemassa jokin sellainen todistus (totuusarvoasetus), että kaikki sen klausuulit toteutuvat. Jos taas $\varphi \notin \mathsf{SAT}$, toteuttaa jokainen totuusarvoasetus vähemmän kuin $(1 - \varepsilon)m$ klausuulia. Todennäköisyys sille, että k satunnaisesti valittua klausuulia toteutuu, on siis pienempi kuin $1/2$. Tarkastaja pystyy erottamaan SAT-ongelman toteutuvat ja toteutumattomat tapaukset vähintään todennäköisyydellä $1/2$, joten $\mathsf{SAT} \in \mathsf{PCP}(\log n, 1)$.

   Toimivasta ideasta saattoi saada 4 pistettä ja sen riittävän yksityiskohtaisesta esittämisestä 2 pistettä.