582465 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)
2. kurssikoe 6.5. kello 9–12 auditorio A111
vastuuhenkilö Jyrki Kivinen

Vastaa kaikkien tehtävien kaikkiin kohtiin. Kokeen maksimipistemäärä on 20 pistettä. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä.

1. [*8 pistettä*] Kurssilla on käsitelty kysyntäpohjaista monihyödykevuota (demands multicommodity flow; muistin virkistykseksi ongelman määritelmä on toistettu kääntöpuolella).

   (a) Esitä ongelma lineaarisena kokonaislukuohjelmana. Muodosta tämän ohjelman lineaarisen löysennöksen duaali.

   (b) Osoita, että maksimituotanto f^* toteuttaa yhtälön

   $$f^* = \min_{\boldsymbol{d}} \frac{\sum_{e \in E} c_e d_e}{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{dem}(i) d_{(s_i,t_i)}}.$$

   Tässä minimointi on yli metriikoiden $\boldsymbol{d}$. Siis $\boldsymbol{d}$ liittää kaareen e pituuden d_e siten, että kolmioepäyhtälö pätee.

2. [*6 pistettä*] Kurssilla on käsitelty monensuuntaista leikkausongelmaa (multiway cut) sekä osajoukkotakaisinkytkentäongelmaa kaarille ja solmuille. Muistin virkistykseksi ongelmien määritelmät on toistettu kääntöpuolella. Osoita seuraavat näiden ongelmien väliset suhteet:

   (a) Monensuuntaisesta leikkauksesta on approksimointisuhteen säilyttävä palautus osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan kaarille.

   (b) Osajoukkotakaisinkytkentäongelmasta kaarille on approksimointisuhteen säilyttävä palautus osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan solmuille.

3. [*6 pistettä*] Kurssilla on todettu, että PCP-teoreeman perusteella jollain $\varepsilon > 0$ on olemassa raon ε tuottava polynomisessa ajassa laskettava palautus f SAT-ongelmasta MAX-3SAT-ongelmaan. Siis kun $\psi = f(\varphi)$, missä φ on SAT-tapaukseksi tulkittu propositiologiikan kaava ja ψ MAX-3SAT-tapaukseksi tulkittu propositiologiikan kaava, niin

   - jos $\varphi \in \mathrm{SAT}$, niin $\mathrm{OPT}(\psi) = m$
   - jos $\varphi \notin \mathrm{SAT}$, niin $\mathrm{OPT}(\psi) < (1 - \varepsilon)m$

   missä m on kaavan ψ klausuulien lukumäärä.

   Osoita kääntäen, että jos on olemassa tällainen palautus f, niin $\mathrm{SAT} \in \mathrm{PCP}(\log n, 1)$. (PCP-teoreema seuraa tästä helposti.)

   Vihje: Muunna SAT-tapaus φ 3SAT-tapaukseksi ψ. Tarkastaja olettaa todistuksen olevan optimaalinen totuusarvoasetus ja saavuttaa virhetodennäköisyyden $1 - \varepsilon$. Toista tarvittavan virhetodennäköisyyden saavuttamiseksi.

Tentissä esiintyvien optimointiongelmien määritelmiä:

Kysyntäpohjaisessa monihyödykevuossa on annettu verkko $G = (V, E)$, päätesolmuparit $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ ja kaarten kapasiteetit c_e. Lisäksi hyödykkeelle i, $i = 1, \ldots, k$, on annettu *kysyntä* $\mathrm{dem}(i)$. Oletamme, että kahdella eri hyödykkeellä $i \neq j$ pätee $\{ s_i, t_i \} \neq \{ s_j, t_j \}$.

Tehtävänä on maksimoida *tuotanto* (throughput) f ehdolla, että hyödykkeen i vuo solmusta s_i solmuun t_i on ainakin $f \cdot \mathrm{dem}(i)$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Kunkin yksittäisen hyödykkeen vuo toteuttaa normaalit vuon säilymisehdot. Kaaren e yli kulkeva vuo saa olla korkeintaan c_e, kun lasketaan yhteen kaikki hyödykkeet ja kumpikin suunta.

Monensuuntaisessa leikkausongelmassa on annettu verkko $G = (V, E)$, kaarten painofunktio $w \colon E \to \mathbb{Q}_+$ ja päätesolmujen joukko $\{ s_1, \ldots, s_k \} \subseteq V$. Tehtävänä on löytää painoltaan pienin kaarijoukko, jonka poistaminen leikkaa kaikki päätesolmut erilleen eli joka kaikilla $i \neq j$ sisältää ainakin yhden kaaren jokaiselta solmujen s_i ja s_j väliseltä polulta.

Osajoukkotakaisinkytkentäongelmassa kaarille on annettu verkko $G = (V, E)$, joukko *kiinnostavia* solmuja $S \subseteq V$ ja kaarten painofunktio $w \colon E \to \mathbb{Q}_+$. Verkon G sykli on kiinnostava, jos se sisältää ainakin yhden kiinnostavan solmun. Tehtävänä on löytää painoltaan pienin *osajoukkotakaisinkytkentäkaarijoukko* (subset feedback edge set) eli kaarijoukko, joka sisältää ainakin yhden kaaren jokaisesta kiinnostavasta syklistä.

Osajoukkotakaisinkytkentäongelmassa solmuille on annettu verkko $G = (V, E)$, joukko *kiinnostavia* solmuja $S \subseteq V$ ja ei-kiinnostavien solmujen painofunktio $w \colon V - S \to \mathbb{Q}_+$. Verkon G sykli on kiinnostava, jos se sisältää ainakin yhden kiinnostavan solmun. Tehtävänä on löytää painoltaan pienin *osajoukkotakaisinkytkentäsolmujoukko* (subset feedback vertex set) eli ei-kiinnostavien solmujen joukko, joka sisältää ainakin yhden solmun jokaisesta kiinnostavasta syklistä.