58131 Tietorakenteet ja algoritmit (kevät 2015)

Harjoitus 1 (12.–16.1.2015)

Tämän harjoituskerran "lämmittelytehtävät" perustuvat esitietoina edellytettäviin kursseihin *Ohjelmoinnin perusteet* ja *Ohjelmoinnin jatkokurssi* sekä kurssiin *Johdatus yliopistomatematiikkaan* tai sen edeltäjään *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.*

1. (a) Olli Ohjelmoija on kirjoittamassa java-koodia. Pitkän pähkäilyn jälkeen hän sai `if`-lauseen ehto-osan tällaiseksi (missä A ja B ovat boolean-muuttujia):

   ```
   !(A && !B) || B
   ```

   Auta Ollia kirjoittamaan ehto mahdollisimman helppoon muotoon.

   (b) Ollin eräältä toiselta ohjelmariviltä löytyy ehto:

   ```
   !(!A && !B) && A
   ```

   Auta taas Ollia kirjoittamaan ehto mahdollisimman helppoon muotoon.

   (c) Entä miten seuraavaa ehtoa voi yksinkertaistaa:

   ```
   !(((A || (A && !B)) && (B || !A)) && !(A || B))
   ```

2. Tässä tehtävässä kertaamme kvanttoreita ja implikaatiota. Kvanttorit on esitelty mm. kurssin Johdatus yliopistomatomatematiikkaan luentomateriaalissa, ks. `http://www.helsinki.fi/~lpjoinon/jym/materiaali/tktmat.pdf`.

   Huomautus: on erilaisia merkintätapoja samalle asialle. Esimerkiksi $\forall x : P(x)$ on sama asia kuin $\forall x(P(x))$. Käytämme tässä implikaatiolle merkintää $\Rightarrow$.

   Kerro kustakin seuraavasta lauseesta, päteekö se vai ei. Tässä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat loogisia lausekkeita. Perustele.

   (a) $\neg(\forall x : P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x : \neg P(x)$

   (b) $\neg(\forall x : P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x : \neg P(x)$

   (c) $\neg(\exists x : P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x : \neg P(x)$

3. Tietojenkäsittelijä voi ajatella logaritmia usein seuraavasti: a-kantainen logaritmi $\log_a n$ kertoo, kuinka monta kertaa luku n pitää jakaa luvulla a, ennen kuin päästään lukuun 1. Esimerkiksi $\log_2 8$ on 3, koska 8/2/2/2 on 1. Jos lukuun 1 ei päästä tasajaoilla, logaritmin lopussa on desimaaliosa, joka kuvaa viimeistä vaillinaista jakoa. Esimerkiksi $\log_2 9$ on noin 3,17, koska 9/2/2/2 on 1,125, eli kolmen jaon jälkeen on vielä hieman matkaa lukuun 1, mutta neljäs täysi jako veisi jo selvästi sen alapuolelle.

   Laske seuraavat logaritmit ilman laskinta:

   (i) $\log_4 64$

   (ii) $\log_{10} 10000$

   (iii) $\log_{11} 1$

   (iv) $\log_5 5^8$

Vastaavasti voimme viedä tämän ajattelun askeleen pidemmälle ja määritellään *iteratiivisen logaritmin funktio* $\log_a^* n$, joka kertoo montako kertaa pitää ottaa luvusta logaritmi, ennen kuin päästään lukuun 1 *tai sen alle*. (Huom: Tässä vastauksena on siis kokonaisluku ilman mitään desimaaliosaa.) Esimerkiksi $\log_2^* 16 = 3$, koska $\log_2(\log_2(\log_2 16))) = \log_2(\log_2 4) = \log_2 2 = 1$. Tämä erittäin hitaasti kasvava funktio tulee kurssin loppupuolella vastaan.

Laske seuraavat iteratiivisen logaritmin arvot ilman laskinta:

(v) $\log_{10}^* 70000$

(vi) $\log_{10}^* 10^{10000}$

4. Tarkastellaan ei-negatiivisten kokonaislukuarvoisten desimaalilukujen (eli kymmenkantaisten lukujen) *binääriesityksiä* (eli 2-kantaisia esityksiä) ja *heksadesimaaliesityksiä* (eli 16-kantaisia esityksiä). Heksadesimaalinumerot ovat 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F. Esim. luvulle 43 saadaan binääriesitys 101011 (koska $1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 43$) ja heksadesimaaliesitys 2B (koska $2 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 43$). (Noudatamme tällä kurssilla konventiota, että $n^0 = 1$, jos n on positiivinen kokonaisluku.)

   (a) Mikä on suurin desimaaliluku, jota voi esittää 8 bitillä, eli binääriluvulla jonka maksimipituus on 8? Tässä ja jatkossa oletetaan, että esityksiin ei laiteta turhia etunollia.

   (b) Esittääkö seuraava binääriesitys parillista vai paritonta kokonaislukua: 110110101110111101010101101110? Perustele.

   (c) Kuinka pitkä on luvun 175 binääriesitys?

   (d) Johda yleinen kaava desimaaliluvun binääriesityksen pituudelle.

   (e) Johda yleinen kaava desimaaliluvun heksadesimaaliesityksen pituudelle.

   Voit käyttää pyöristyksiin seuraavia merkintöjä (x on reaaliluku):

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}$$

5. Todista induktiolla

   (a)
$$\sum_{i=1}^{n} (4i - 2) = 2n^2$$

   (b)
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

   (c)
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$