hyväksymispäivä arvosana

arvostelija

Al-Khwârizmî

Laura Kataja

Espoo 2.2.2004
Seminaarityö, tieteenkäsittelytieteen historia
Tietojenkäsittelytieteen laitos
HELSINGIN YLIOPISTO

Sisällys

1. Johdanto 2
2. Al-Khwârizmîn elämä ja henkilö 2
3. Al-Khwârizmîn teokset 2
3.1. Al-Khwârizmî tähti- ja maantieteilijänä 3
3.1.1. Al-Khwârizmî maantieteilijänä 3
3.1.2. Al-Khwârizmî tähtitieteilijänä 4
3.2. Al-Khwârizmî matemaatikkona 5
3.2.1. Algebra 5
3.2.2. Muut teokset, aritmetiikka 6
4. Yhteenveto 7
4.1. Al-Khwârizmîn teosten lähteistä 7
5. Lähteet 8
6. Kirjallisuutta 9

1. Johdanto

Al-Khwârizmîna tunnettu henkilö tuntuu kuuluvan enemmän matematiikan kuin tietojenkäsittelytieteen historiaan. Tietojenkäsittelyn kannalta hän on kuitenkin mielenkiintoinen kahdesta (tai kolmesta) syystä. Ensimmäinen on se, että hänen nimestään on peräisin sana algoritmi. Toinen syy on se, että hänen työnsä antiikin ja Intian matematiikan perinteen kehittäjänä ja yhdistäjänä on ollut käytännössä välttämätön matematiikan ja sitä myötä tietojenkäsittelyn kehitykselle. Kolmas syy, joka kyllä liittyy molempiin edellisiin, on se että hänen teoksistaan löytyy usein algoritminen lähestymistapa ongelmiin.

2. Al-Khwârizmîn elämä ja henkilö

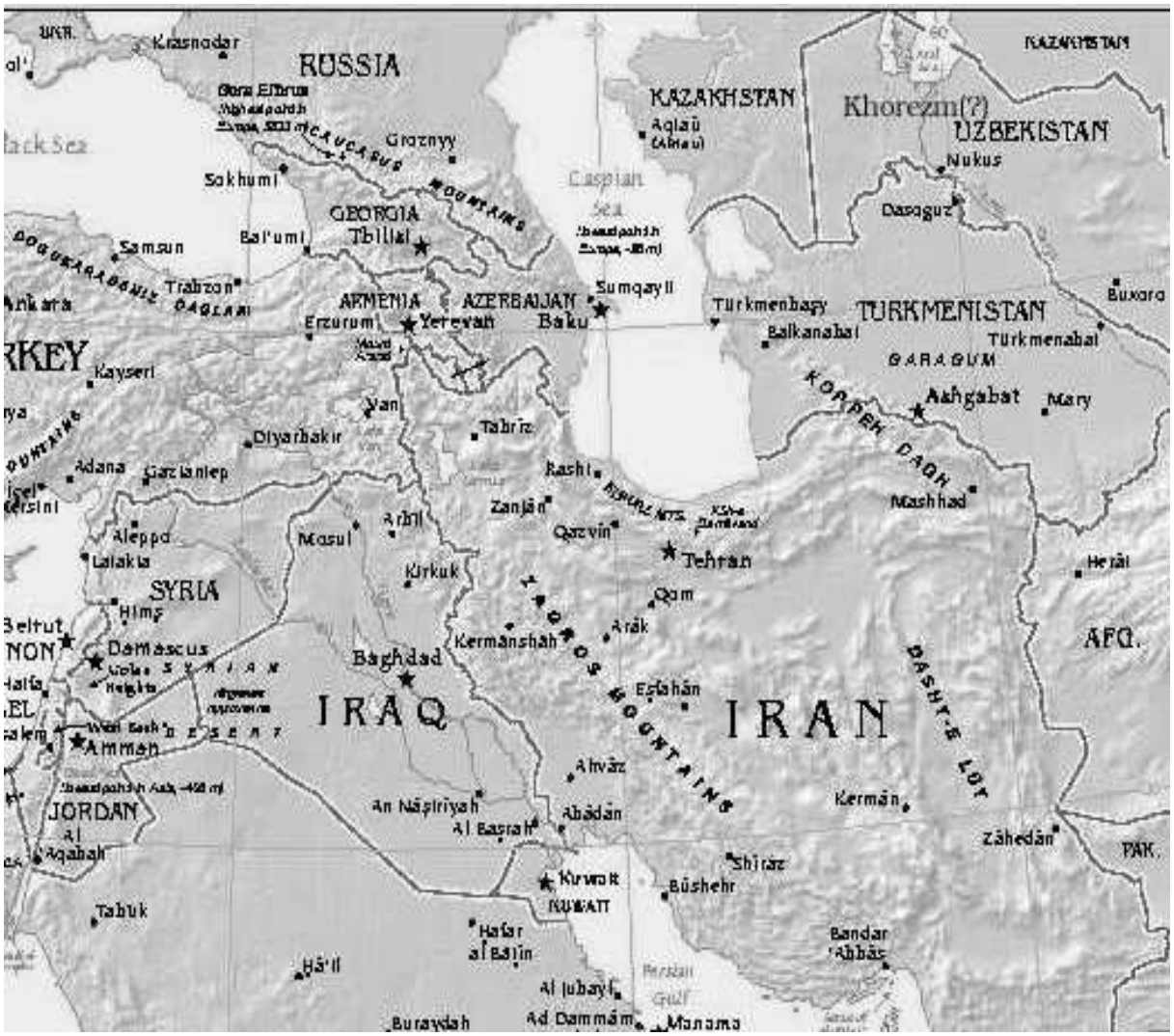
Al-Khorezmin, täydellisemmin Abû Ja^{c}far Muḥammad ibn Mûsâ al-Khwârizmîn elämästä tiedetään varsin vähän. Lisänimi al-Khwârizmî näyttäisi tarkoittavan sitä, että hän olisi kotoisin Khorezmin alueelta, Aral-järven eteläpuolelta. Historioitsija at-Ṭabarî kuitenkin antaa hänelle toisen lisänimen, “al-Quṭrubbullî”, joka viittaisi siihen, että hän olisi kotoisin Quṭrubbullista, Tigriin ja Eufratin väliseltä alueelta Bagdadin lähellä. Hän käyttää Al-Khwârizmîsta myös lisänimeä “al-Mažûsî”, ‘magi’, joka puolestaan viittaisi siihen että tämä olisi ollut zarathustralainen. Periaatteessa tämä olisi ollut mahdollista, joskin tuohon aikaan jo varsin epätodennäköistä. Al-Khwârizmîn “Algebran” esipuheen perusteella on kuitenkin aihetta olettaa, että hän oli muslimi. Kenties hänen sukunsa oli ollut zarathustralainen, ja mainitulta Khorezmin alueelta. [Gil70, s. 358]

Pääasiallisen elämäntyönsä Al-Khwârizmî joka tapauksessa teki Bagdadissa. Kalifi al-Ma’mûnin (hallitsi 813-833) aikana hänet nimettiin jäseneksi “Viisauden huoneeseen” (Dâr al-Ḥikma), eräänlaiseen Bagdadin tiedeakatemiaan. Tämä akatemia oli luultavasti Harûn-ar-Rašîdin perustama, mutta kukoisti nimenomaan Ma’mûnin aikana (Gandzin [Gan36, s. 263] mukaan se oli Ma’mûnin perustamakin).

Al-Khwârizmîn elinvuosista voidaan päätellä sen verran että syntymävuoden täytyy (edellisen perusteella) olla ennen vuotta 800. Toisaalta hänen tiedetään melko varmasti olleen elossa vielä vuonna 847, koska at-Ṭabari mainitsee hänet yhtenä niistä astronomeista jotka oli kutsuttu tuona vuonna kalifi al-Wâthiqin sairasvuoteen luo, ja jotka ennustivat horoskoopin perusteella tämän elävän vielä 50 vuotta. Kalifi kuitenkin kuoli astrologien järkytykseksi kymmenen päivää myöhemmin.

3. Al-Khwârizmîn teokset

Al-Khwârizmî tunnetaan parhaiten matemaatikkona ja tähtitieteilijänä. Tämän lisäksi hän on julkaissut myös maantieteellisen teoksen, joka sisältää pääasiassa paikkakuntien koordinaatteja. Erittäin todennäköisesti Al-Khwârizmî on ollut mukana työstämässä kalifi Ma’mûnin teettämää maailmankarttaa.[Gil70 s. 361-2] Sen sijaan historioitsijana tunnettu Al-Khuwârizmî on ollut eri henkilö.[Gil70 s. 357-8.]



Kuva 1. Khorezm on merkitty Aral-järven alapuolelle, Qṭrubbulli on lähellä Bagdadia [Pla04].

Ibn Abî Jaᶜqûb an-Nadîmin “Kitâb al-Fihrist”:issä (luettelossa) mainitaan al-Khwârizmîn kohdalla ainoastaan hänen astronomiset taulukkonsa (Sindhind, joka on väännös astronomisten taulukoiden hindinkielisestä nimityksestä), sekä aurinkokelloa, astrolabin rakentamista ja käyttöä sekä ajanlaskua käsittelevät teokset.[Sut92 s. 29] On kuitenkin todennäköistä, että luettelo on tässä kohdassa mennyt sekaisin. Sekä al-Khwârazmîta edeltävä että seuraava oppinut tässä oppineiden luettelossa ovat myös matemaatikkoja, mikä osaltaan selittäisi virhettä. Edellisen nimen, Sahl ben Bišrin kohdalla nimittäin mainitaan “algebraa käsittelevä ylistetty kirja” ja seuraavan, Sind ben ᶜAlîn kohdalla kirjat jotka käsittelevät “intialaista laskutapaa”, “lisäämistä ja vähentämistä” ja “algebraa”.[Sut92 s. 62-63]

3.1. Al-Khwârizmî tähti- ja maantieteilijänä

3.1.1. Al-Khwârizmî maantieteilijänä

Al-Khwârizmîn maantietoa käsittelevä kirja oli nimeltään Kitâb Ṣûrat al-ʿArḍ, 'maan kuvan kirja'. Tämän teoksen innoittajana on ollut useammankin kerran arabiaksi käännetty Claudius Ptolemaioksen 100-luvulta jKr. oleva maantieteellinen teos. Kirja on nimittäin järjestetty kreikkalaisen seitsemän ilmastotyypin järjestelmän mukaan. Se jakautuu kuuteen jaksoon. Ensimmäinen jakso luettelee kaupungit, toinen vuoret, kolmas meret, neljäs saaret, viides erinäisten maantieteellisten alueiden keskuspisteet ja kuudes joet. Kirja on pääasiassa taulukkomuotoinen, ja koostuu mainittujen paikkojen pituus- ja leveysasteista. Kirjaan kuuluneita karttoja on säilynyt neljä, alun perin niitä on saattanut olla useampi, ja säilyneet vaikuttavat olevan myöhäisempiä muunnelmia mahdollisista alkuperäisistä.[Ayy90, s. 217-8]

3.1.2. Al-Khwârizmî tähtitieteilijänä

Al-Khwârizmîn astronomiset taulut eivät ole säilyneet alkuperäisinä. Niistä tunnetaan todennäköisesti 1100-luvulla tehty latinankielinen käännös espanjalaisen astronomin Maslama al-Majrîṭîn versiosta, sekä ibn al-Muthannân kommentaari (luultavasti 900-luvulta), josta siitäkään alkuperäistä ei ole säilynyt, mutta sen sijaan olemassa on sekä heprean- että latinankieliset käännökset.[Gol67 s. 5, Neu62, s. 7]

Al-Khwârizmî ei ole kopioinut taulujaan suoraan sen paremmin Intian kuin Kreikankaan suunnalta, vaan vaikutteita on selvästi kummastakin. Kappaleiden järjestys noudattaa intialaisia esikuvia, ja poikkeaa Ptolemaioksen Almagestista, esimerkiksi planeettateoria on esitelty ennen pimennysten käsittelyä. Teoksen nimi oli Zîž al-sindhind, jossa Zîž merkitsee "tähtitieteellisiä taulukoita", ja sindhind on vääntynyt muoto sanskriitin sanasta *siddhanta* joka lienee ollut osa lähteenä käytetyn intialaisen teoksen nimestä.[Gil70 s.360]

Teoksen ensimmäinen luku käsittelee ajanlaskuongelmia. Al-Khwârazmî käsittelee kolmea kalenteria ja näiden mukaisten päiväysten muuttamista toisikseen: Aleksanterin l. seleukidista kalenteria, Hižran mukaista ajanlaskua, joka on puhdas kuukalenteri, ja kolmantena persialaista ajanlaskua, joka on peräisin viimeisen muslimivalloitusta edeltäneen Persian kuninkaan Jazdegidin ajalta, ja jossa vuosien pituus on Egyptistä peräisin olevan tavan mukaan tasan 365 päivää. Mikään näistä kalentereista ei ollut Intiassa tunnettu.[Gol67, s. 6]

Planeettojen sijainnista esitetään intialaisen järjestelmän mukaiset laskut, mutta niitä koetetaan selittää kreikkalaisittain geometrisesti. Myös teoksen trigonometrisessa osassa on erikoisella tavalla sekoitettu intialaisia ja kreikkalaisia menetelmiä. Esimerkiksi ekliptikan kaltevuus on osassa laskelmia intialaisten käyttämä 24˚, osassa Ptolemaioksen deklinaatiotaulujen mukainen 23˚51'20". Lisäksi tekijä selvästi tietää muslimien määrittämän paremman arvon, 23˚33', mutta ei käytä tätä.[Gol67, s.7]

3.2. Al-Khwârizmî matemaatikkona

Al-Khwârizmîn matemaattiset pääteokset olivat laaja algebraa käsittelevä teos, sekä intialaisia numeraaleja (paikkajärjestelmää) sekä aritmetiikkaa käsittelevä teos.

3.2.1. Algebra

Al-Khwârizmîn teos, johon jatkossa viittaan nimellä Algebra, oli täydelliseltä nimeltään al-Kitâb al-mukhtaṣar fîḥisâb al-žabr wa-l-muqâbala. Tästä teoksesta on säilynyt yksi arabiankielinen käsikirjoitus, ja latinankielinen käännös, joka selvästi on tehty eri versiosta kuin tämä.[Høy91]

Al-žabr tarkoittaa mm. paikalleen palauttamista, ja muqâbala "tasapainottamista".[WeC76, s.v.] Ensin mainittu on sittemmin lainautunut eurooppalaisiin kieliin muodossa algebra.[Sez74 s. 229] Sana on muuten matemaattisessa merkityksessä vielä vanhempaa perua, ja ilmeisesti lainaa jo arabiassa: babylonialaisessa matematiikassa käytettiin termiä gabru, "jäljennös, vastustaja" tässä merkityksessä.[AHw, s.v. gab(a)rû, Sez74, s. 237] Tarkalleen ottaen žabr yhtälöiden kohalla merkitsee negatiivisen termin poistamista yhtälöstä (lisäämällä kummallekin puolelle vastaava positiivinen termi) ja muqâbala sitä että poistetaan ylimääräiset, toisiaan vastaavat termit yhtälön molemmilta puolilta (ts. sievennetään se vakiomuotoiseksi).[Sai90, s. 274]

Al-Khwârizmîn "Algebra" jakautuu viiteen osaan:

Ensimmäisessä osassa on esitetty toisen asteen yhtälöiden ratkaisuja. Nämä on jaettu kuuteen eri tyyppiin:

$ax^2 = bx$

$ax^2 = c$

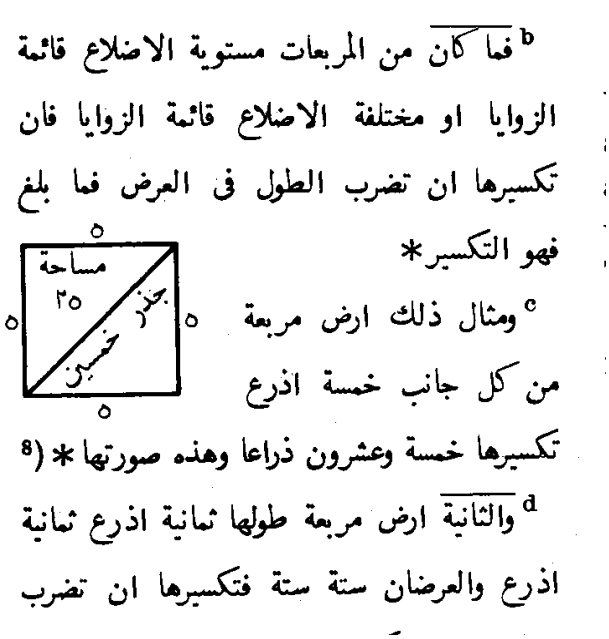
$bx = c$

$ax^2 + bx = c$

$ax^2 + c = bx$

$ax^2 = bx + c$

Näissä a, b, ja c ovat aina positiivisia lukuja, ja al-Khwârizmî käsittelee yhtälöt siten että a = 1, ts. muiden tekijöiden kertoimet jaetaan ensin a:lla. Lisäksi ainoastaan reaaliset ja positiiviset juuret otetaan huomioon. Toisen asteen yhtälöllä voi siis tällä tavoin määriteltynä olla 0, 1 tai 2 juurta.



Kuva 2. Tässä selostetaan suorakaiteen alan laskemista. Halkaisijassa lukee "50:n (neliö)juuri".[Gan32 s. 75]

Teoksen toisessa osassa al-Khwârizmî käsittelee perusgeometriaa. Kolmas osa käsittelee binomien kertolaskua. Tämä esitellään Euklideen esittämien periaatteiden mukaisesti. Neljännessä osassa käsitellään neliöjuurten laskemista, neliöjuurten tulon ja osamäärän kaavojen avulla.

Kirja päättyy joukkoon esimerkkitapauksia, joissa lasketaan toisen ateen yhtälöiden juuria.[Sou90, s.282] Vaikkapa yhtälön $x^2 + 10x = 39$ ratkaisu:

> "Neliö ja 10 saman juurta, on yhteensä 39 dirhamia"[1]
>
> Puolitat juurten määrän, mistä tässä tapauksessa tulee viisi. Kerrot sen itsellään: tulo on 25. Lisää tämä 39:ään, summa on 64. Nyt otat tästä neliöjuuren, joka on kahdeksan, ja vähennät siitä juurten määrän puolikkaan, joka on viisi, jäljellr jää kolme. Tämä on etsimäsi neliön juuri; neliö itse on 9.

Al-Khwârizmîn käyttämä terminologia on yksinkertaista ja perustuu tavalliseen arabian sanastoon. Hänen tuntemattomasta käyttämänsä termi "šai'", kirjaimellisesti 'jokin', tai 'asia', lainattiin espanjaan kirjoitusasussa xei, joka sitten lyheni muotoon x. [Sou90, s. 285]

3.2.2. Muut teokset, aritmetiikka

Al-Khwârizmîn intialaisia numeraaleja ja aritmetiikkaa käsitellyt teos alkuperäiseltä nimeltään Kitâb al-hisâb al-hindî on säilynyt ainoastaan latinankielisenä käännöksenä, nimellä "Algoritmi de numero indorum".[Sut00 s.11] Tässä "algoritmi" on vääntynyt muoto nimestä, jolla tekijä tunnettiin. Ja syystä tai toisesta –minusta tuntuu että pikemminkin hänen algebraa käsittelevässä teoksessaan esitettyjen menetelmien vuoksi – algoritmi on saanut nykyisen, etenkin tietojenkäsittelyssä käytetyn merkityksensä. 1200-luvulla algoritmi merkitsi yksinkertaisesti laskemista arabialaisilla numeroilla.[Sou68, s.48]

Tämä teos käsittelee intialaisten käyttämät numerot sekä erilaisia aritmeettisia menetelmiä, yhteen- ja vähennys, sekä kerto- ja jakolaskuja, sekä kymmen- että 60-järjestelmän mukaan, ja myös laskuja murtoluvuilla. Viimeksi käsitellään vielä sekä kokonais- että murtolukujen neliöjuuria.[Sai90, s. 275]

Lisäksi al-Khwârazmîn tiedetään kirjoittaneen kolmannenkin matematiikan alaan kuuluvan teoksen, nimeltään Kitâb al žam^{c} wa'l-tafrîq, "lisäämisen ja vähentämisen kirja". Nimi kuitenkin viittaa peruslaskutoimituksiin, ja menetelmään jossa käytetään sormia laskemisen apuna. Tämä ei ole säilynyt, lukuunottamatta pitkähköä lainattua kappaletta, jossa lasketaan kuinka paljon rahasummasta on jäljellä kolmen vuoden veronmaksun jälkeen.[Sai90, s. 277-8]

---

[1] Laskutehtävissä luvut eivät ole paljaita, vaan niissä esiintyy yksikkönä "dirhami" (raha). Tämä noudattaa intialaista tapaa.

4. Yhteenveto

Al-Khwârizmîn teoksista pääteltävissä olevat lähteet kertovat siitä eri traditioden kohtaamisesta, joka yhtenä tekijänä sai aikaan tieteiden kukoistuksen abbasidikauden Bagdadissa, aikana jolloin Euroopassa tieteiden kehitys oli varsin pysähdyksissä. Arabit tunnetaan vanhan kreikkalaisen tradition välittäjinä ja säilyttäjinä, mutta he eivät olleet pelkästään sitä, vaan kehittivät traditiota edelleen ja lisäsivät uutta.

Latinankielisinä käännöksinä nämä teokset puolestaan antoivat sysäyksen länsimaisen tieteen kehitykselle. 'Harvassa ovat ne teokset, joita on luettu, käännetty ja kommentoitu yhtä paljon kuin "Kitâb al-žabr wa'l muqâbalah'ia'[Sou90, s. 283]. Ja intialaisen numerojärjestelmän, "arabialaisten numeroiden" vaikutusta matematiikan ja sen sukulaisalojen kehitykseen on vaikea yliarvioida.

Vanhemmassa länsimaisessa kirjallisuudessa [esim. Gan36] esitetään että al-Khwârazmîn Algebra oli selvästi "alkeellisempi" teos kuin esimerkiksi Diofantoksen Aritmetiikka, ja edustaa varhaisempaa "retorista" perinnettä. Toisaalta on todettava, että "Algebra" lienee kirjoitettu nimenomaan perusoppikirjaksi, jonka on tarkoituskin lähteä liikkeelle (melkein) alkeista, ja olla rakenteeltaan opettavainen. Lisäksi teos oli ensimmäinen *arabian kielellä* tuotettu algebran perusasioiden esitys.[Sai90 s.274]

4.1. Al-Khwârizmîn teosten lähteistä

Algebrassa esitettyjen toisen asteen yhtälöiden geometristen ratkaisujen juuret ovat vanhassa babylonialaisessa matemaattisessa traditiossa, jopa niin että Al-Khwârizmî esittää samoja esimerkkejä jotka esiintyvät jo matemaattisissa nuolenpääteksteissä, ja samoin sanankääntein.[Høy90a, s. 247-8]

Teoksen alussa menetelmät, algoritmit, esitetään kuitenkin selvästi kreikkalaistyyppisesti muotoiltuina.[Høy87, s.295] Yhtenä välittäjänä on selvästi ollut hepreankielinen Mišnat ha-middot, jopa niin että Algebran geometriaa käsittelevä osa on suora käännös tästä.[Gan36 s.265] Sen sijaan intialainen vaikutus on tässä teoksessa varsin vähäistä ja välillistä, ja näkyy lähinnä joissakin esitetyissä ongelmissa.[Høy87, 292-3]

Intiasta tulleet matemaattiset vaikutteet ovat lähinnä trigonometrian alueella, sekä numerojärjestelmässä, mutta islamilaiset tiedemiehet eivät ilmeisesti ole tunteneet intialaisia matemaattisia ja astronomisia teoksia alkuperäisinä, vaan tieto on tullut välikäsien ja käytännön taulukoiden kautta. Ilmeisintä tämä on astronomian alalla. [Høy87, 286-7].

Høyrup esittää että islamilaisen matematiikan juuret ylipäänsä ovat pääasiassa tuon alueen "alitieteellisessä" (sub-scientific) traditiossa. Kysymys ei ollut teoreettisesta tieteestä meidän käsittämässämme mielessä, vaan toisaalta käytännön laskemisetsa, kun tarvittiin menetelmiä ajanlaskun ylläpitämiseen, maanmittaukseen jne., toisaalta "koulutraditiosta", jossa tietyt matemaattiset arvoitukset kiertävät maailmaa. Esimerkkinä voidaan mainita meidänkin tuntemamme tarina "šakkipelin keksijän palkkiosta", jossa summa kerrotaan kahdella 64 kertaa. Toisissa versioissa

kahdennuksia on 30, ja tämä versio esiintyy jo 1700-luvulta eKr peräisin olevassa babylonialaisessa nuolenpäätaulussa.[Høy87 s. 288]

Lähteeni eivät mainitse mitään siitä, että Al-Khwârizmîn tähtitieteellisistä taulukoista olisi löydettävissä mitään viitteitä babylonialaiseen tieteen perintöön. Tämä vaikuttaa yllättävältä, kun toisaalta matemaattisista teksteistä on löydettävissä erittäin selviä viitteitä. Onko babylonialaisten tähtitieteilijöiden tiedot todella tyystin unohdettu, vai eikö mahdollisia viitteitä vain ole osattu etsiä.

5. Lähteet

AHw — von Soden, Wolfram, Akkadisches Handwörterbuch, Wiesbaden 1965 - 1981.

Ayy90 — Ayyubi, N. Akmal, Contribution of Khwârizmî to mathematics and geography. Acts of the international symposium on Ibn Turk, Khwârezmî, Fârâbî, Beyrûnî and Ibn Sînâ. Atatürk culture center publications 41. Series of acts of congresses and symposiums 1. s. 213-219. Ankara 1990.

Gan32 — Gandz, Solomon, The Mishnat ha middot and the geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. A, Band 2, Berlin 1932.

Gan36 — Gandz, Solomon, The sources of al-Khowârizmî's algebra, Osiris I, s. 263-277, Belgium 1936.

Gil70 — Gillespie, Dictionary of scientific biography. New york 1970-1980.

Gol67 — Goldstein, Bernard R., Ibn al-Muthannâ's Commentary on the astronomical tables of al-Khwârizmî. London 1967.

Høy87 — Høyrup, Jens, The formation of "Islamic Mathematics" sources and conditions, Science in Context, vol. 1, nr. 2, s. 281 - 329, 1987.

Høy90a — Høyrup, Jens, Algebraic traditions behind Ibn Turk and Al-Khwârizmî. Acts of the international symposium on Ibn Turk, Khwârezmî, Fârâbî, Beyrûnî and Ibn Sînâ. Atatürk culture center publications 41. Series of acts of congresses and symposiums 1. s. 247-268 Ankara 1990

Høy91 — Høyrup, Jens, "Oxford" and "Cremona" on the relation between two versions of al-Khwârizmî's algebra. Roskilde 1991.

Neu62 — Neugebauer, Otto, The astronomical tables of al-Khwârizmî. Historisk-filosofiske skrifter udgivet af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Bind 4, nr. 2. København 1962.

Pla04 — http://plasma.nationalgeographic.com/mapmachine/index.html, National Geographicin verkkokartasto. [1.2.2004]

Sai90 Saidan, A.S., The algebra and arithmetic of Al-Khwârizmî Muhammad Ibn Mûsâ. Acts of the international symposium on Ibn Turk, Khwârezmî, Fârâbî, Beyrûnî and Ibn Sînâ. Atatürk culture center publications 41. Series of acts of congresses and symposiums 1. s. 273-280 Ankara 1990

Sez74 Sezgin, Fuat, Geschichte des arabischen Schrifttums, Band V. Leiden 1974.

Sou68 Souissi, Mohamed, La langue des Mathématiques en arabe, Tunis 1968.

Sou90 Souissi, Muhammed. Impact de Hawârizmî sur l'école mathématique Maghrébine et progrés réalisés par cete derrière. Acts of the international symposium on Ibn Turk, Khwârezmî, Fârâbî, Beyrûnî and Ibn Sînâ. Atatürk culture center publications 41. Series of acts of congresses and symposiums 1. s. 281-295 Ankara 1990

Sut92 Suter, Heinrich, Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist des ibn Abî Ja^{c}qûb an-Nadîm, Zeitschrift für Mathematik und Physik, vol. 37, Supplement, 1892.

Sut00 Suter, Heinrich, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß hirer Anwendungen. X Heft. Leipzig 1900.

WeC76 Wehr, Hans & Cowan, J. Milton, Arabic - English dictionary. New York 1976.

6. Kirjallisuutta

Cha99 Chabert, Jean-Luc & al., A history of algorithms. From the pebble to the microchip. Italy 1999.

Høy86 Høyrup, Jens, Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: on the origins of islamic algebra. Erdem 2 s. 445-484. Ankara 1986.

Høy89 Høyrup, Jens, Zur Frühgerschichte algebraischer Denkweisen. Mathematische Semesterberichte 36 s. 1-46, 1989.

Høy90b Høyrup, Jens, mathematics: observations on a pre-modern phenomenon. History of Science 28, s. 63-86. Cambridge 1990.

Sjö95 Sjöberg, Boris, Från Euklides till Hilbert, historien om matematikens utveckling under tvåtusen år. Åbo 1995.

Str63 Struik, Dirk J., Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin 1963.

You81 Young, Laurence, Mathematicians and their times. Mathematics Studies 48. Netherlands 1981.