hyväksymispäivä arvosana

arvostelija

Leibniz tietojenkäsittelytieteessä

Juha Ranta

Helsinki 14.5.2004

HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Sisältö

1 Johdatus

Gottfried Wilhelm Leibniz oli kiinnostunut hyvin monesta eri alasta, kuten metafysiikasta, teologiasta, matematiikasta, teologiasta ja filosofiasta. Lisäksi Leibnizin filosofiasta ja elämästä on kirjoitettu lukuisia tutkielmia ja kirjoja. Tämän esitelmän tarkoitus on hieman tarkemmin käsitellä nimenomaan Leibnizin tietojenkäsittelytieteeseen liittyviä ajatuksia ja saavutuksia.

Esitelmässä kerrotaan aluksi lyhyesti Leibnizin elämästä. Tarkemmin esitellään Leibnizin laskukoneen historiallisia taustoja ja toimintaperiaate. Lisäksi esitelmässä kerrotaan Leibnizin binäärilukuihin ja universaalikieleen liittyvistä ajatuksista ja tuloksista.

2 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz [Ait85, Ari95] syntyi 1646 Leibzigissä akateemiseen perheeseen. Leibnizin isä, Friedrich Leibniz, oli moraalifilosofian professori ja työskenteli Leipzigin yliopistossa. Isä kuoli Leibnizin ollessa kuusivuotias. Jo lapsena hän oppi täydentämään koulussa opittuja tietoja tutustumalla itsenäisesti esimerkiksi runouden, historian filosofian, teologian, metafysiikan ja matematiikan teoksiin isänsä kirjastossa. Koulussa Leibniz innostui suuresti perinteisestä Aristoteleen logiikasta, jonka osaamisessa hän hämmästytti opettajansa; hän jopa löysi puutteita Aristoteleen logiikassa ja keksi aiheesta uusia ideoita.

Leibniz opiskeli lakia ja filosofiaa vuosina 1661-1667 Leibzigin ja Altdorfin yliopistoissa. Näissä yliopistoissa annettu matematiikan opetus oli alhaisella tasolla ja Leibniz itse on maininnut, että jos hän olisi Pascalin tavoin käynyt yliopistossa Pariisissa, olisi hän mahdollisesti voinut aloittaa tieteellisten tulosten tekemisen aikaisemmin. Hänen oikeustieteen tohtorin arvoa varten esittämä väitöskirjansa hylättiin Leipzigin

Kuva 1: Gottfried Wilhelm Leibniz [Dav03]

tiedekunnassa. Hylkäämiseen oli mahdollisesti syynä Leibnizin nuori ikä tai jonkinlaiset ongelmat Leibnizin ja Leipzigin opettajakunnan välillä. Väitöskirja kuitenkin hyväksyttiin seuraavana vuonna Altdorfin yliopistossa.

Väitöskirjan hyväksymisen jälkeen Leibniz ei tahtonut yliopistoon professoriksi vaan lähti matkustamaan tarkoituksenaan vierailla esimerkiksi Hollannissa. Mainzissa 24-vuotias Leibniz tapasi vaaliruhtinas Baron Johann Christian von Boineburgin, joka nimitti hänet korkean tuomioistuimen tuomariksi. Leibniz työskenteli myös kuuluisan paroni Johann Christian von Boineburgin palveluksessa sihteerinä, apulaisena, lakimiehenä sekä neuvonantajana. Vuonna 1672 Boineburg lähetti Leibnizin Ranskaan diplomaattiselle matkalle, jonka salaisena tarkoituksena oli suostutella Ranskan kuningas Ludvid XIV hyökkäämään Egyptiin Hollannin sijaan. Leibnizin saavuttua Pariisiin Englanti oli jo hyökännyt Ranskaan ja Hollantiin, minkä vuoksi Leibnizin hylkäsi diplomaattiset suunnitelmansa. Leibniz kuitenkin vietti neljä seuraavaa vuotta Ranskassa tutustuen Antoine Arnauldin ja Christiaan Huygensin kaltaisiin merkittäviin tiedemiehiin ja ajattelijoihin.

Asuessaan Pariisissa Leibniz vieraili Lontoossa, jossa hänet hyväksyttiin Lontoon Royal Societyn jäseneksi esittämänsä laskukoneen mallin perusteella. Näihin aikoihin Leibniz myös huomasi, että hänen tietonsa korkeammasta matematiikasta olivat puutteelliset. Hän esimerkiksi esitteli keksimiään matemaattisia tuloksia tietämättä muiden jo keksineen samat tulokset ja sai tämän vuoksi niskaansa plagiointisyytöksiä. Leibniz opiskeli vuoden ajan intensiivisesti modernimpaa matematiikkaa, jonka jälkeen hän oli jo pian tärkeitä tuloksia tuottava matemaatikko.

Leibniz työskenteli samanaikaisesti usean eri aiheen parissa, minkä vuoksi jotkut biografian kirjoittajat ovat jopa päättäneet, että hänen uraansa ei voi kunnolla selittää kronologisessa järjestyksessä [Ari95]. Leibniz ei juuri julkaissut laajempia teoksia ja suuri osa hänen ajatuksistaan on myöhemmin selvitetty hänen käymästään kirjeenvaihdosta.

Matematiikassa Leibnizin tunnetuin saavutus on differentiaali- ja integraalilaskennan kehittäminen. Leibnizin notaatio on käytössä edelleen. Ilmeisesti Isaac Newton ja Leibniz kehittivät differentiaali- ja integraalilaskennan toisistaan riippumatta, mutta heidän välilleen kehittyi varsin törkyinen riita, jossa Newton syytti Leibnizia ideoidensa varastamisesta.

Leibnizin myöhemmän filosofian ja metafysiikan mukaan todellisuus muodostuu jakamattomista monadeista. Aika ja avaruus eivät ole konkreettisesti olemassa, vaan ne ovat abstrakteja ja suhteellisia käsitteitä. Avaruus on selitettävissä samanaikaisesti olevien asioden suhteellisella järjestyksellä ja aika asioiden peräkkäisellä järjestyksellä.

Matemaattisten ja filosofisten pohdintojen lisäksi Leibniz oli kiinnostunut käytännönläheisemmistäkin ongelmista. Harzin kaivoksen projekti kuvaa hyvin Leibnizin luonnetta. Leibnizin ajatuksena oli rakentaa uudenlainen tuuli- ja vesivoimalla toimiva laitteisto veden siirtämiseen pois kaivoksista. Tästä saatavilla tuloilla hän optimistisesti suunnitteli perustavansa oman tiedeyhteisön universaalin karakteristiikan kehittämiseen. Leibniz sai Harzin kaivoksen mukaan projektiinsa. Kaivoksen spesialistit kuitenkin vastustivat Leibnizia ja projektissa tuli vastaan erilaisia teknisiä ongelmia. Lopulta seitsemän vuoden ja moninkertaisesti ylitetyn budjetin jälkeen projekti lakkautettiin Leibnizin harmiksi.

Viimeisinä vuosinaan Leibnizin yhteydenpito matemaatikkojen kanssa liittyi lähinnä kiistaan hänen ja Newtonin välillä. Leibniz kuoli vuonna 1716.

3 Leibnizin laskukone

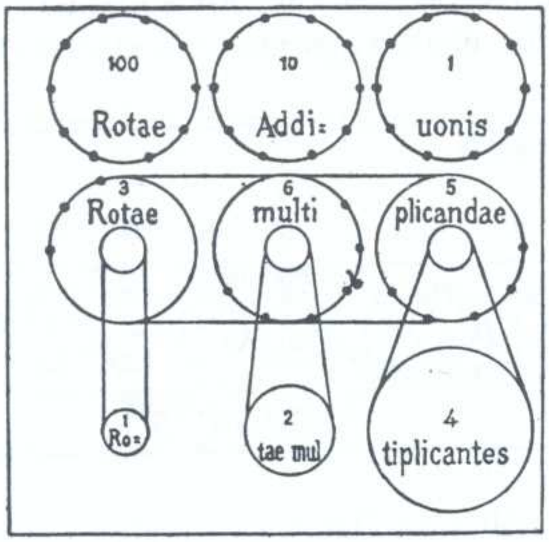
3.1 Historiaa ja taustoja

Vuonna 1673 Leibniz esitteli keskeneräistä puista prototyyppiä laskukoneestaan muille oppineille Pariisissa ja Lontoon Royal Societyssä [Ait85]. Tämän ansiosta Leibniz hyväksyttiin yksimielisesti Royal Societyn jäseneksi. Konetta pidettiin heti sekä Lontoossa että Pariisissa yhtenä aikansa tärkeimmistä keksinnöistä. Laskukoneella pystyi laskemaan yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja. Leibniz oli jo käyttänyt valtavasti aikaa koneensa rakentamiseen, mutta lupasi pian saavansa valmiiksi valmiin version. Tämä oli Leibnizille tyypillisesti liian optimistinen arvio. Leibniz keskittyi moniin muihin projekteihin, kuten oman matematiikan osaamisen kehittämiseen, ja lupaamansa toimivamman version koneesta hän sai valmiiksi vuodeksi 1676. Tällöin Leibniz esitteli toimivan version laskukoneestaan Pariisin tiedeakatemialle.

Koneen toimintaa käsittelevässä käsikirjoituksessaan [Lei59] Leibniz toteaa, että toisin kuin Pascalin konetta, jolla hänen mielestään ei ole paljoa käytännön merkitystä johtuen kerto- ja jakolaskutoimintojen puutteesta, hänen konettaan voi käyttää hyväkseen esimerkiksi hallinnon, tieteen ja kaupankäynnin parissa työskentelevät ihmiset. Hänen mielestään ei ole sopivaa, että lahjakkaat ihmiset kuluttavat aikaansa laskemiseen, kun laskemisen voi automatisoida.

Leibnizin koneen rattaita käytettiin laskukoneissa aina 1900-luvulle asti [Dav03].

3.2 Laskukoneen toiminta



Kuva 2: Leibnizin laskukoneen rattaat [Lei59].

Käsikirjoituksessa *Machina arithmetica in qua non additio tantum et subtractio sed et multiplication nullo, divisio vero paene nullo animi labore peragantur* (englanninkielinen käännös lähteessä [Lei59]) vuodelta 1685 Leibniz esittelee laskukoneensa toimintaperiaatetta. Käsikirjoituksessa Leibniz kertoo kuulleensa Pascalin laskukoneesta [Pas59] ja tiedustelleensa siitä välittömästä kirjeitse pariisilaiselta ystävältään. Pascalin kone osasi yhteen- ja vähennyslaskut. Leibniz toteutti samat operaatiot koneeseensa samalla tavalla kuin Pascalin koneessa, mutta lisäksi Leibnizin kone suoriutuu kerto- ja jakolaskuista.

Leibnizin koneessa on kolmenlaisia rattaita yhteenlaskua, kerrottavia ja kertojia varten. Yhteenlaskurattaat vastaavat lukuja 1, 10, 100 ja niin edelleen (kuva 2, *Rotae addiuonis*). Jokaisella rattaalla on kymmenen asentoa ja esimerkiksi yhteenlaskurattaan 100 asennoilla voi siten esittää luvut 100, 200, .., 900. Kun ratas pyörähtää yhdeksästä nollaan, sitä ylemmän luvun ratas kulkee yhden askeleen eteenpäin. Tämä yhteenlaskurattaiden toiminnan periaate on siis peräisin Pascalin laskukoneesta.

Kerrottavien rattaisiin (kuva 2, *Rotae multiplicandae*) asetetaan pystyyn kerrottavia lukuja vastaava määrä liikuteltavia hampaita. Kuvan esimerkissä kerrottavien rattaisiin on asetettu luku 365. Kerrottavaa lukua 5 vastaava ratas liittyy yhteenlaskurattaaseen 1 ja lukua 6 vastaava ratas yhteenlaskurattaaseen 10. Kaikki yhteenlaskurattaat on aluksi asetettu siten, että niihin liittyvästä aukosta voi lukea luvun nolla.

Kertojien rattaista (kuva 2, *Rotae multiplicantes*) on eri kokoja riippuen siitä, mitä lukua ne vastaavat. Esimerkiksi lukua 4 vastaava ratas on suurempi kuin lukua 2 vastaava. Rattaat on mitoitettu siten, että kun kertojien rattaat kytketään kerrottavien rattaisiin kuvan esittämällä tavalla, yksi kertojan rattaan kierros pyörittää vastaavaa kerrottavan ratasta kertojan määräämän verran kokonaisia kierroksia. Esimerkiksi jos kertojan ratas vastaa lukua 4, yksi sen tekemä kierros pyörittää vastaavaa kerrottavan ratasta neljä kierrosta. Kytkemisen jälkeen kerrottavan ratas kääntää jokaisella kierroksellaan hampaidensa verran sitä vastaavaa yhteenlaskuratasta eteenpäin. Tämän lisäksi kerrottavien rattaat on kytketty toisiinsa nuoralla siten, että ensimmäinen ratas pyörittää seuraavaa ratasta, joka edelleen pyörittää sitä seuraavaa ratasta ja niin edelleen. Eli jos esimerkin kerrottavan lukua 5 vastaava ratas pyörähtää kerran, myös lukuja 6 ja 3 vastaavat rattaat pyörähtävät kerran. Näidenkin rattaiden pyörähtäminen tietysti kääntää vastaavia yhteenlaskurattaita. Näin kone siis kertoo esimerkin kerrottavan luvun 365 luvulla 4, kun lukua 4 vastaavaa ratasta pyöritetään yhden kerran.

Tämän jälkeen kerrottavien ja kertojien rattaiden kelkkaa siirretään eteenpäin siten, että esimerkin lukuja 4 ja 5 vastaava rataspari on yhteenlaskurattaan 10 alla, lukuja 2 ja 6 vastaava rataspari yhteenlaskurattaan 100 alla ja lukuja 3 ja 1 vastaava rataspari yhteenlaskurattaan 1000 alla. Kun nyt käännetään lukua 2 vastaavaa ratasta, kaikki kolme kerrottavien ratasta pyörähtävät kaksi kertaa. Nämä kolme kerrottavien ratasta edelleen kääntävät vastaavia yhteenlaskurattaita. Yhteenlaskurattaissa oli siis ennen tätä toimenpidettä aikaisempi neljällä kertomisen tulos, ja toimenpiteen jälkeen yhteenlaskurattaista voi lukea arvon $(20 + 4) * 365 = 8760$. Sama toimenpide toistetaan lopuille kertojan luvuille, eli esimerkin tapauksessa luvulle 1, jonka jälkeen laskutoimituksen lopullisen tuloksen $(100 + 20 + 4) = 45260$ voi lukea yhteenlaskurattaista.

Jakaminen koneella ei itse asiassa ole täysin automaattista. Leibniz kuitenkin esittää sellaisen tavan jakaa lukuja, että jakolasku häen koneellaan onnistuu kohtuullisen pienellä vaivalla. Jakolaskutekniikan perusidea on selitetty seuraavassa esimerkin avulla. Jaetaan luku 43520 luvulla 110. Nähdään suhteellisen helposti, että kun alkuperäisen jaettavan 43520 alkuosa 435 jaetaan luvulla 110, niin jaon kokonaisosa on 3. Jakaja 110 kerrottuna kolmella on 330 ja jakojäännös $435 - 330$ on siis 105. Tämä luku 105 liitetään alkuperäisen jaettavan jäljellä olevan osan seuraavaan lukuun 2 ja saadaan luku 1052. Tälle luvulle 1052 suoritetaan samat operaatiot kuin edellä on esitetty. Siis kokonaisosa jaosta $1052/110$ on 9 ja $1052 - (110 * 9)$ on 62. Edelleen liitetään tämä luku 62 viimeiseen jaettavan jäljellä olevaan lukuun 0 ja saadaan luku 620. Taas arvioidaan kokonaislukuosa jaosta $620/110$, joka on 5. Jakojäännös $620 - (5 * 110)$ on 70 ja kokonaislukuosa jaosta $700/110$ on 6. Tähän mennessä lasketut kokonaisosat ovat siis $3, 9, 5$ ja 6, jotka muodostavat tuloksen kokonaisosan ja ensimmäisen desimaalin eli luvun $395,6$. Loput desimaalit saadaan samalla periaatteella. Kun tätä tekniikkaa sovelletaan Leibnizin laskukoneella, koneen käyttäjän täytyy arvioida suhteellisen helposti laskettavat kokonaisosat ja kone

00000	0
00011	3
00110	6
01001	9
01100	12
01111	15
10010	18
10101	21

Taulukko 1: Luvut $0, 3, 6, .., 21$ binäärilukuina. Esimerkki on teoksesta [Ait85].

suoriutuu muista laskutoimituksista.

4 Binääriluvut

Leibniz pyysi kesällä 1700 tekemällään matkalla Berliiniin neuvoja Philippe Naudelta liittyen binääriaritmetiikkaan [Ait85]. Leibniz saikin Naudelta kirjeen, johon oli listattu binäärilukujen jonoja. Hänen tarkoituksensa oli tutkia binäärilukujen jonoissa esiintyviä säännönmukaisuuksia. Hän oli jo huomannut esimerkiksi sen, että lukujen $0, 3, 6, ..$ tapauksessa binäärilukujen sarakkeet muodostuvat toistuvista jaksoista (taulukko 1). Ensimmäisessä sarakkeessa toistuu 01, toisessa 0110 ja kolmannessa 00101101. Näistä hän oli jo huomannut, että toistuvien jaksojen loppuosa saadaan vaihtamalla alkuosan luvuista jokainen nolla yhdeksi ja yksi nollaksi.

Leibniz ehdotti pian saatuaan Naudelta binäärilukujen jonot, että binääriaritmetiikan pohjalta voisi ehkä kehittää uuden lukuteorian. Vaikka binääriluvuille ei tässä vaiheessa tunnettu juurikaan sovelluksia, Leibniz halusi julkaista aihetta koskevat tuloksensa. Tulokset julkaistiin teoksessa *Essay d'une nouvelle science des nombres* vuonna 1701.

Näihin aikoihin Leibniz oli myös kirjeenvaihdossa Kiinassa lähetystyötä tekevän Joachim Bouvet'n kanssa. Leibniz oli lähettänyt selityksen binääriaritmetiikasta Bouvet'lle, joka huomasi yhtäläisyyden muinaisilta kiinalaisilta periytyvän I Ching -järjestelmän kanssa ja lähetti tästä kirjeen Leibnizille. Leibniz innostui samankaltaisuudesta ja teki pian binäärijärjestelmäänsä käsittelevän julkaisun *Explication de l'arithmetique binaire, qui se sert des seuls caracteres 0 et 1, avec des remarques sur son utilite, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoises de Fohu* [Lei71] (Binääriaritmetiikan selitys käyttäen vain numeroita 0 ja 1, mukanaan huomioita sen soveltamisesta sekä sen antamasta merkityksestä Fuxin muinaisille kiinalaisille kuvioille). Selitys sekä osittainen englanninkielinen käännös tästä julkaisusta löytyy lähteestä [Lod93].

Tässä julkaisussa esitellään normaaleja kymmenkantaisen järjestelmän lukuja vastaavat binääriluvut taulukossa sekä selitetään, miten binääriluvuilla lasketaan yhteen-, vähennys-, jako- ja kertolaskuja. Leibniz kirjoittaa, että ei ole syytä käyttää binäärilukuja normaaliin laskemiseen, mutta binääriluvut ovat tärkeitä tieteelle. Niiden avulla voidaan tehdä uusia löytöjä esimerkiksi aritmetiikassa ja geometriassa. Tässä yhteydessä Leibniz selittää, että erilaisista binäärilukujen jonoista löytyy huomattavia säännönmukaisuuksia. Säännönmukaisuuksien perusteella voisi hänen mielestään löytää täysin uusia totuuksia luvuista. Ilmeisesti hän ajatteli, että esimerkiksi binäärilukujen sarakkeiden säännönmukaisuuksista (taulukko 1) voisi mahdollisesti päätellä kymmenjärjestelmän lukujen ominaisuuksia.

Leibniz suunnitteli myös laskukoneestaan binääriluvuilla toimivaa versiota, vaikka ymmärsikin tällaiseen koneeseen liittyvät tekniset ongelmat [Ait85]. Esimerkiksi rattaiden suuri määrä lisäisi koneen sulavaan toimintaan liittyviä ongelmia, joita oli jo Leibnizin aikaisemmassa laskukoneessa. Hän ei koskaan saanut valmiiksi tällaista binääriluvuilla toimivaa versiota.

Leibniz harkitsi myös binäärilukujen käyttöä perustana universaalille karakteristiikalle, jota käsitellään seuraavassa luvussa.

5 Universaali karakteristiikka

Leibnizilla oli jo opiskeluaikoina idea erityisestä universaalista ajattelun, tieteen tai filosofian kielestä eli universaalista karakteristiikasta. Leibnizilla oli paljon erilaisia suunnitelmia tästä universaalista karakteristiikasta elämänsä aikana [Rut95]. Universaalin karakteristiikalla voisi tarkasti ilmaista mitä tahansa käsitteitä, joista voisi edelleen päätellä erilaisia asioita. Kielen avulla oppineet voisivat tarkasti määritellä minkä tahansa ongelman, istua pöydän ääreen, huudahtaa 'Lasketaan!' ja laskea ongelmalle ratkaisun, eikä kenenkään pitäisi olla eri mieltä tuloksesta. Nykypäivän näkökulmasta tämä tietysti vaikuttaa varsin optimistiselta.

Leibnizin kaavaileman universaalin karakteristiikan pitäisi pystyä esittämään kaikki monimutkaiset käsitteet ja niiden väliset loogiset suhteet yksinkertaisesten käsitteiden avulla. Kielen yksinkertaiset merkit edustaisivat yksinkertaisia käsitteitä äänteiden sijaan ja monimutkaiset käsitteet esitettäisiin näiden yksinkertaisten merkkien avulla. Leibniz todennäköisesti itsekin ymmärsi näiden yksinkertaisten käsitteiden määrittelyyn liittyvät ongelmat. Hän esimerkiksi ehdotti, että kerätään ensin kaiken inhimillisen ymmärryksen sisältävä käsikirja, jonka perusteella voitaisiin valita perustavanlaatuiset käsitteet [Dav03].

Käsitteiden ja niiden loogisten suhteiden lisäksi universaaliin karakteristiikaan kuuluisi kielioppi, jonka avulla voitaisiin päätellä asioita vastaavalla tavalla kuin matematiikassa lasketaan laskuja.

Noin vuodesta 1979 eteenpäin Leibniz suunnitteli binäärilukujen käyttöä universaalin karakteristiikkansa perustana [Rut95]. Luvut 0 ja 1 olisivat tämän kielen yksinkertaiset symbolit. Kirjeessään Bouvet'lle Leibniz kirjoittaa, että hän on keksinyt binäärijärjestelmään perustuvan karakteristiikan, joka jatkaa muinaisten kiinalaisten jalanjäljillä ja antaa pohjan loistavalle ajattelun kielelleen. Projektin myöhemmistä vaiheista Leibniz ei kuitenkaan juuri kirjoittanut. Tämä johtuu mahdollisesti ylitsepääsemättömistä ongelmista sen suhteen, miten kaikki käsitteet voidaan esittää monimutkaisina nollan ja yhden yhdisteinä.

Myöhemmällä iällään noin vuodesta 1690 eteenpäin Leibniz näyttäisi keskittyneen enemmän universaaliin karakteristiikkaan yleisenä teoriana symbolisten muotojen yhdistelmistä [Rut95]. Tässä Leibniz ei niinkään enää yritä käsitellä kielellään käsitteitä itsessään vaan symboleita, joiden väliset siirtymät riippuvat annetuista säännöistä. Tämä muistuttaa itse asiassa paljon modernia symbolista logiikkaa. Leibniz esimerkiksi keksi monet niistä tärkeistä periaatteista, joiden pohjalle George Boole rakensi logiikkansa 1800-luvulla ilmeisesti tuntematta Leibnizin aiheesta tekemiä tutkimuksia [Dav03]. Yleensäkin nämä Leibnizin ajatukset vastaavat modernin logiikan todistamista.

Tietojenkäsittelytieteen näkökulmasta on mielenkiintoista, että Leibniz kaavaili myös universaalin karakteristiikan säännöillä toimivaa konetta [Dav03].

6 Lopuksi

Kuollessaan Leibniz jätti jälkeensä laskukoneensa, differentiaali- ja integraalilaskennan ja lukuisten muiden saavutusten lisäksi valtavasti keskeneräisiä projekteja. Monet hänen ajatuksistaan unohtuivat hänen kuolemansa jälkeen. Mahdollisesti jotkut hänen ideoistaan olivat liian paljon aikaansa edellä. Hänen seuraajillaan oli varmasti vaikea ymmärtää hänen ajatteluaan ja lähtökohtiaan erilaisissa asioissa. Useat Leibnizin tavoitteista olivat varmasti myös liian optimistisia ja korkealentoisia, jotta niiden voisi odottaa toimivan ainakaan nykypäivän näkökulmasta. Kaikesta huolimatta Leibniz lienee innoittanut myös lukuisia tietojenkäsittelijöitä 1900-luvulla sekä kuluvalla vuosituhannellakin.

Lähteet

Ait85 Aiton, E. J., *Leibniz: A Biography.* Adam Hilger, Bristol, 1985.

Ari95 Ariew, R., G.W. Leibniz, life and works. Teoksessa *The Cambridge Companion to Leibniz*, Jolley, N., toimittaja, Cambridge University Press, 1995, sivut 18–42.

Dav03 Davis, M., *Tietokoneen esihistoria Leibnizista Turingiin.* Art House, Helsinki, 2003.

Lei59 Leibniz, G. W., On his calculating machine. Teoksessa *A Source Book in Mathematics*, Smith, D. E., toimittaja, osa 1, Dover Publications, New York, 1959, sivut 173–181.

Lei71 Leibniz, G. W., Explication de l'arithmetique binaire, qui se sert des seuls caracteres 0 et 1, avec des remarques sur son utilite, et sur ce cu'elle donne le sens de anciennes figures Chinoises de Fohy. Teoksessa *G.W. Leibniz: Mathematische Schriften*, Gerhardt, G., toimittaja, Olms, Hildesheim, 1971, sivut 223–227.

Lod93 Lodder, J., Binary arithmetic: From Leibniz to von Neumann, New Mexico State Universityn kurssimateriaalia, 1993. URL `http://emmy.nmsu.edu/hist_projects/binaryI.pdf`.

Pas59 Pascal, B., On his calculating machine. Teoksessa *A Source Book in Mathematics*, Smith, D. E., toimittaja, osa 1, Dover Publications, New York, 1959, sivut 165–172.

Rut95 Rutherford, D., Philosophy and language in Leibniz. Teoksessa *The Cambridge Companion to Leibniz*, Jolley, N., toimittaja, Cambridge University Press, 1995, sivut 224–269.