

Luento 6

# Tietokone- aritmetiikka

(Computer Arithmetic)



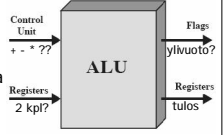
Stallings: Ch 9

- n Kokonaislukuesitys
- n Kokonaislukuaritmetiikka
- n Liukulukuesitys
- n Liukulukuaritmetiikka

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 1

## ALU: Aritmeettis-Looginen Yksikkö

- n **ALU = Arithmetic Logic Unit**
- n **Suorittava yksikkö, tiedon käsittely**
  - u Kokonaisluku ja liukulukuaritmetiikka
  - u Vertailut, sivuttaissiirrot
  - u Bittien kopiointi rekistereistä toiseen
  - u Osoitelaskenta: Hyyt, muistiviitaukset
- n **Input**
  - u Yleensä kaksi operandia sisään
  - u Rekistereistä (ja muistista)
- n **Operatio**
  - u Usein käskyrekisterin perusteella
- n **Output**
  - u Rekisteriin/Muistiin/PSW:hen



[Sta06 Fig 9.1]

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 2

## Tietokoneen rakenne

# Kokonaislukujen esitys

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 3

## Kokonaislukuesitys (Integer Representation)

- n **Arvo binäärimuodossa, bittijonona**
- n **"Merkin" paino määräytyy paikan mukaan**

$$\begin{aligned}
 57 &= 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\
 &= 32 + 16 + 8 + 1 \\
 &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
 &= 0011\ 1001 \\
 &= 0x39 \\
 &= 3 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 \quad \text{heksadesimaaliesitys}
 \end{aligned}$$

- n **Eniten merkitsevä bitti / vähiten merkitsevä bitti**
  - u MSB, most significant bit
  - u LSB, Least significant bit

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 4

## Kokonaislukuesitys (Integer Representation)

- n **Entä negatiiviset arvot?**
  - u Etumerkki-suuruus
  - u 2:n komplementtimuoto

$-57 = \underline{0}111\ 1001$   
 $-57 = \underline{1}100\ 0111$

etumerkki

- n **Tietokoneet käyttävät 2:n komplementtia**
  - u Ei erikseen +0 ja -0
  - u Laskuissa ei tarvitse erikseen huomioida etumerkkiä
  - u Vähennyslasku voidaan suorittaa yhteenlaskuna!
  - u Helpompi laitteistolle

$$\begin{aligned}
 +2 &= 0000\ 0010 \\
 +1 &= 0000\ 0001 \\
 0 &= 0000\ 0000 \\
 -1 &= 1111\ 1111 \\
 -2 &= 1111\ 1110
 \end{aligned}$$

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 5

## 2:n komplementti

- n **Esimerkki**
  - u 8-bittinen esitys, esitä arvo -57

$$\begin{aligned}
 57 &= 0011\ 1001 && \text{itseisarvo} \\
 &1100\ 0110 && \text{invertoi bitit (1:n komplementti)} \\
 &1100\ 0110 && \\
 &\underline{1} && \text{lisää 1} \\
 &1100\ 0111 && \text{2:n komplementtimuoto}
 \end{aligned}$$

- u Laajentuu helposti esim. 16-bittiseksi

$57 = \underline{0}011\ 1001 = \underline{0}000\ 0000\ \underline{0}011\ 1001$

$-57 = \underline{1}100\ 0111 = \underline{1}111\ 1111\ \underline{1}100\ 0111$

Hylkää mahd. ylivuotava bitti

sign extension

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 6

### 2:n komplementti

**n Arvoalue:**  $-2^{n-1} \dots 2^{n-1} - 1$

8 bits:  $-2^7 \dots 2^7 - 1 = -128 \dots 127$   
 32 bits:  $-2^{31} \dots 2^{31} - 1 = -2\,147\,483\,648 \dots 2\,147\,483\,647$

**n Yhteenlaskun ylivuoto helppo havaita**

- Ei ylivuotoa, jos erimerkkiset yhteenlaskettavat
- Ylivuoto, jos samanmerkkiset yhteenlaskettavat ja tuloksen merkki eri kuin yhteenlaskettavien merkki

57 = 0011 1001  
 + 80 = 0101 0000  
 -----  
 137 = 1000 1001      Ylivuoto!

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 7

### 2:n komplementti

**n Vähennyslasku yhteenlaskuna!**

- Unohda etumerkki, käsittele etumerkittöminä!
- Ensin 2:n komplementti vähennettävästä, sitten add
- Helppo laitteisto

-3 = 1101  
 +1 = 0001  
 -----  
 -2 = 1110

3 = 0011  
 1100  
 1  
 -----  
 1101      -3 2:n komplementtisesityksessä

**n Tarkistus**

- Tuliko ylivuoto?
- Merkki = 1, siis negatiivinen
- 1 tseisarvo: invertoi bitit ja lisää 1

(Sta06 Table 9.1)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 8

### Tietokoneen rakenne

## Kokonaisluku- aritmetiikkaa

- Negaatio
- Yhteen/vähennyslasku
- Kertolasku
- Jakolasku

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 9

### Negaatio = 2:n komplementti

**n 1: invertoi kaikki bitit**

**n 2: lisää 1**

**n 3: tarkista erikoistilanteet**

- Jätä ylivuotobitti huomiotta
- Muutuiko merkki?
  - Pienimmälle luvulle ei negatiota
  - Ellei, aiheuta poikkeus

-57 = 1100 0111  
 0011 1000  
 -----  
 0011 1001  
 = 57

-128 = 1000 0000  
 0111 1111  
 -----  
 1000 0000

**n Helppo laitteisto**

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 10

### Yhteenlasku (ja vähennyslasku)

**n Normaali binääriyhteenlasku**

- Jos vähennyslasku, muodosta vähennettävästä ensin komplementti, sitten yhteenlaskuna

**n Ylivuotobittistä ei tarvitse välittää**

- Tarkkaile sensijaan summan merkkiä

**n Helppo laitteisto**

- 2:n komplementtipiiri ja yhteenlaskupiiri

1100 = -4      1100 = -4  
 +1111 = -1      +1011 = -5  
 -----  
 11011 = -5      10111 = ?

YLIVUOTO!

(Sta06 Fig 9.6)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 11

### Kokonaislukujen kertolasku

**n Binääriluvullakin kuten koulussa opittu**

- Helppo kertoa 0:lla tai 1:llä

**n Laitteistolla?**

- Monimutkainen
- Tarjolla useita algoritmeja

**n Ylivuoto?**

- 32 b operandit → tulos 64 b?

**n Helppo laitteisto, jos etumerkittömiä**

- Vain monta yhteenlaskua
- Tai sivuttaissiirtoa ja yhteenlaskua
  - siirto vasemmalle = kerro 2:lla
  - esim:  $5 * \Rightarrow$  add, shift, shift, add

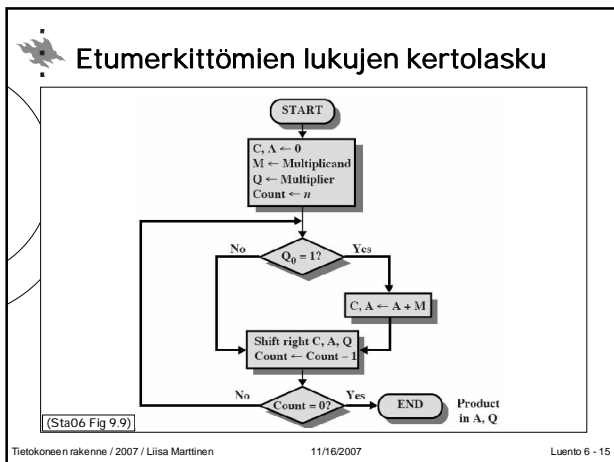
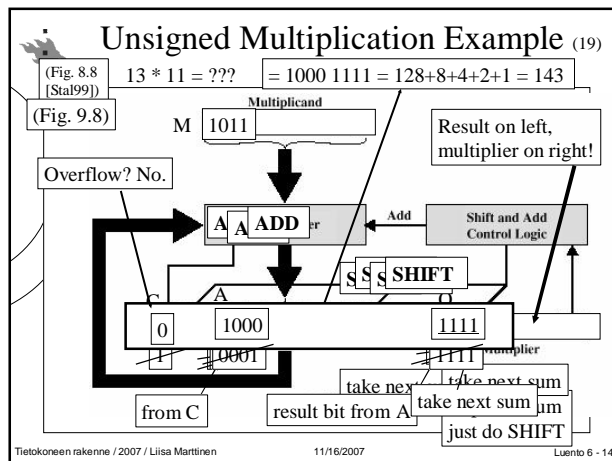
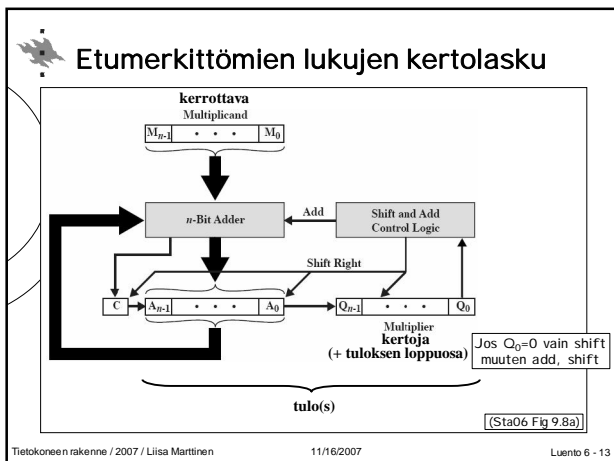
1011      Multiplacand (11)  
 ×1101      Multiplier (13)  
 -----  
 1011  
 0000  
 1011  
 1011  
 -----  
 10001111      Product (143)

(Sta06 Fig 9.7)

2\* 10011 ⇒ 100110

Esimerkki: 5\*11  
 add⇒ 1011  
 shift⇒ 10110  
 shift⇒ 101100  
 add⇒110111 (= 55)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 12



### Etumerkittömien kertolasku [Sta06 Fig 9.8a]

$Q * M = 1101 * 1011 = 1000\ 1111$  eli  $13 * 11 = 143$

C	A	Q	M	
0	0000	1101	1011	Initial Values
0	1011	1101	1011	Add
0	0101	1110	1011	Shift
0	0010	1111	1011	Shift
0	1101	1111	1011	Add
0	0110	1111	1011	Shift
1	0001	1111	1011	Add
0	1000	1111	1011	Shift

(b) Example from Figure 9.7 (product in A, Q) [Sta06 Fig 9.8b]

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 16

- ### Negatiivisten kertolasku?
- n Ed. algoritmi ei toimi negatiivisille luvuille
  - n Voisi tehdä näin
    - u muuta operandit positiivisiksi kokonaisluvuiksi
    - ✓ käytä ed. algoritmia
    - w tutki operandien merkki, muuta tulos tarvittaessa komplementtimuotoon
  - n Parempia ja nopeampia tapoja olemassa
- Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 17

### Boothin Algoritmi

- n Huomlo edell. algoritmista
  - u Yhteenlasku vain (aina), kun kertojassa esiintyy 1
- n Boothin algoritmin idea (tehostus)
  - u Yhdistä vierekkäiset 1:set yhdeksi kontäksi
  - u Tee kontälle yksi yhteenlasku ja yksi vähennyslasku
  - u Esim.  $7 * x = 8 * x + (-x)$

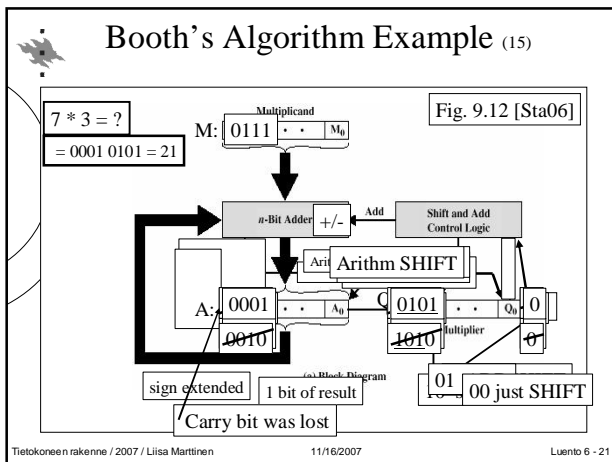
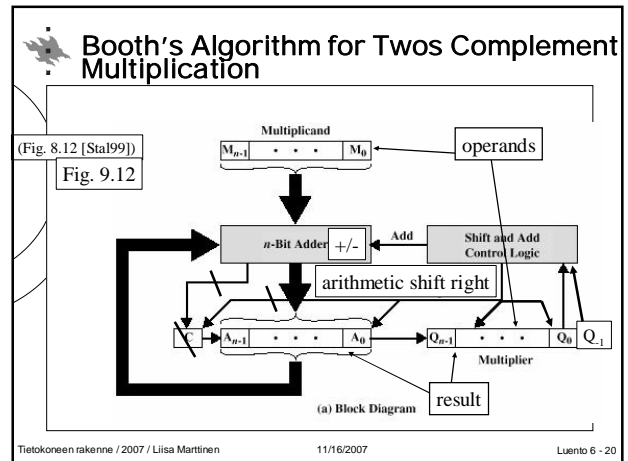
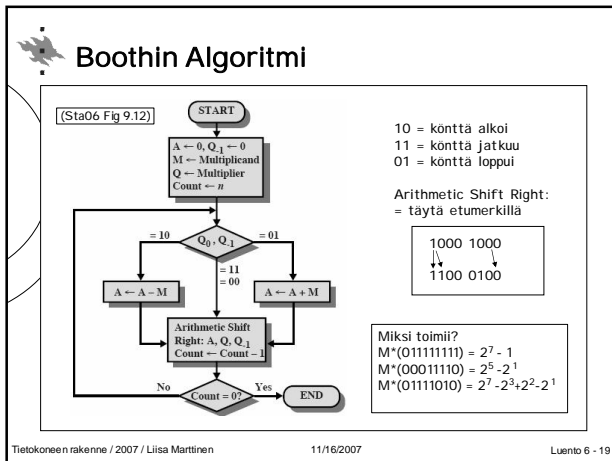
$$111 * x = 1000 * x + (-x) =$$

add, shift, shift, shift, complement, add  
(todellisuudessa päinvastainen järjestys, vähennyslasku ensin)

$5 * 7 = 0101 * 0111$	$= 0101 * (1000-0001)$	$\Rightarrow$	$\begin{array}{r} 00101000 \quad 40 \\ -11111011 \quad -5 \\ \hline 100100011 = 35 \end{array}$
-----------------------	------------------------	---------------	---

- n Toimii 2:n komplementtimuodoille, myös negatiivisille!

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 18



### Boothin Algoritmi, esim.

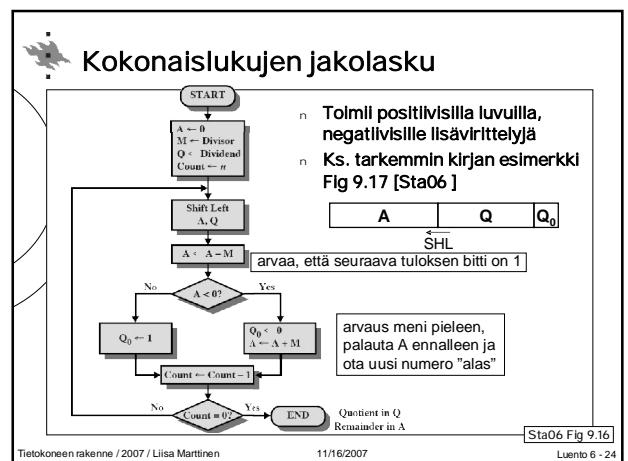
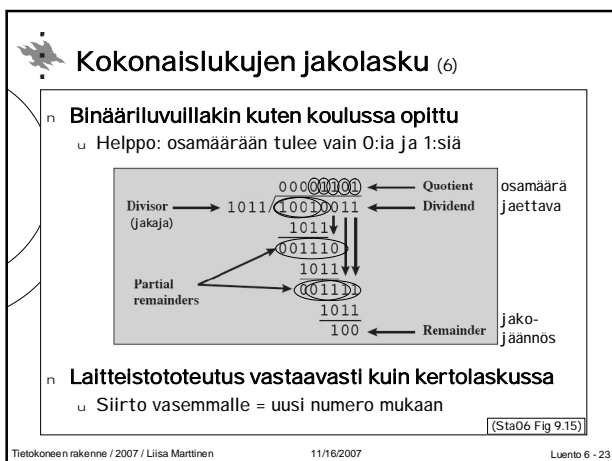
(Sta06 Fig 9.12)

$Q * M = 0011 * 0111 = 0001 0101$  eli  $3 * 7 = 21$

A	Q	Q <sub>-1</sub>	M	Initial Values
0000	0011	0	0111	Initial Values
1001	0011	0	0111	A ← A - M } First Cycle
1100	1001	1	0111	Shift } Second Cycle
1110	0100	1	0111	Shift } Second Cycle
0101	0100	1	0111	A ← A + M } Third Cycle
0010	1010	0	0111	Shift } Third Cycle
0001	0101	0	0111	Shift } Fourth Cycle

(Sta06 Fig 9.13)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 22



### Esimerkki: kahden komplementin jakolasku

Jakolasku:  $7/3$     $A + Q = 7 = 0000\ 0111$     $M = 3 = 0011$

A	Q	
0000	0111	initial value
0000	1110	shift left
1101		subtract M
0000	1110	restore
0001	1100	shift left
1110		subtract M
0001	1100	restore
0011	1000	shift left
0000		subtract M
0000	1001	set $Q_n = 1$
0001	0010	shift
1110		subtract M
0001	0010	restore

Subtract M = Add (-M)  
-M = -3 = 1101

Ensin kokeillaan, onnistuuko jako eli vähennetään ja tutkitaan muuttuuko A:n etumerkki vähennyksen jälkeen. Jos muuttuu, niin vähennys peruutetaan.

Toistetaan, niin monta kertaa kuin Q:ssa on bittejä.

Jos vähennys onnistuu,  $Q_n = 1$

Q = quotient = 2  
A = remainder = 1

Sta06 Fig 9.17 a

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen   11/16/2007   Luento 6 - 25

### Tietokoneen rakenne

# Liukulukuesitys

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen   11/16/2007   Luento 6 - 26

### Liukulukuesitys

**Merkitsevät numerot ja suuruusluokka**

**Normeerattu muoto**

- pistettä edeltävä numero > 0

$-0.000\ 000\ 000\ 123 = -1.23 \cdot 10^{-10}$

$0.123 = +1.23 \cdot 10^{-1}$

$123.0 = +1.23 \cdot 10^2$

$123\ 000\ 000\ 000\ 000 = +1.23 \cdot 10^{14}$

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen   11/16/2007   Luento 6 - 27

### IEEE 754 Liukulukuformaatit

Parameter	Single	Single Extended	Double	Double Extended
Word width (bits)	32	$\geq 43$	64	$\geq 79$
Exponent width (bits)	8	$\geq 11$	11	$\geq 15$
Exponent bias	127	unspecified	1023	unspecified
Maximum exponent	127	$\geq 1023$	1023	$\geq 16383$
Minimum exponent	-126	$\leq -1022$	-1022	$\leq -16382$
Number range (base 10)	$10^{-38}, 10^{+38}$	unspecified	$10^{-308}, 10^{+308}$	unspecified
Significand width (bits)*	23	$\geq 31$	52	$\geq 63$
Number of exponents	254	unspecified	2046	unspecified
Number of fractions	$2^{23}$	unspecified	$2^{52}$	unspecified
Number of values	$1.98 \times 2^{31}$	unspecified	$1.99 \times 2^{63}$	unspecified

\* not including implied bit

(Sta06 Table 9.3)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen   11/16/2007   Luento 6 - 28

### 32-bittinen liukulukuesitys

- 1 b etumerkille**
  - 1 = "-", 0 = "+"
- 8 b exponentille**
  - Ei erikseen etumerkkiä, vaan erillinen nollataso (bias)
  - Esim. Exp=5 g talleta 127+5, Exp=-5 g talleta 127-5
- 23 b mantissalle (significant)**
  - Normeeratussa muodossa binääripistettä edeltävä numero aina 1, ei talleteta (piilobitti, Zuse Z3 1939)
- Binäärimuodossa esitetyn liukuluvun arvo**
  - $-1 \text{Sign} \cdot 1. \text{Mantissa} \cdot 2^{\text{Exponent}-127}$

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen   11/16/2007   Luento 6 - 29

### Esimerkkejä

$23.0 = +10111.0 \cdot 2^0 = +1.0111 \cdot 2^4 = ?$

127+4=131

0	1000 0011	011 1000 0000 0000 0000 0000
sign	exponent	mantissa

$1.0 = +1.0000 \cdot 2^0 = ?$

0+127 = 127

0	0111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000
sign	exponent	mantissa

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen   11/16/2007   Luento 6 - 30

### Esimerkkejä

0	1000 0000	111 1000 0000 0000 0000 0000
sign	exponent	mantissa

$X = ?$

$$X = (-1)^0 * 1.1111_2 * 2^{(128-127)}$$

$$= 1.1111_2 * 2$$

$$= (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16) * 2$$

$$= (1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625) * 2$$

$$= 1.9375 * 2 = 3.875$$

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 31

### Liukulukujen tarkkuudesta (32b)

- n **Arvoalue**
  - u 8 b eksponentti  $g \ 2^{-126} \dots 2^{127} \sim -10^{-38} \dots 10^{38}$
- n **Tarkkuus**
  - u 24 b mantissa  $g \ 2^{24} \sim 1.7 * 10^{-7} \sim 6$  desimaalia
  - u Parempi tarkkuus pienille luvuille ilman normalisointia

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 32

### IEEE 754 Erityismerkitykset

	Single Precision (32 bits)				
	Sign	Biased exponent	Fraction	Value	
positive zero	0	0	0	0	Not a Number
negative zero	1	0	0	-0	
plus infinity	0	255 (all 1s)	0	$\infty$	
minus infinity	1	255 (all 1s)	0	$-\infty$	
quiet NaN	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN	
signaling NaN	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN	
positive normalized nonzero	0	$0 < e < 255$	f	$2^{e-127}(1.f)$	
negative normalized nonzero	1	$0 < e < 255$	f	$2^{e-127}(1.f)$	
positive denormalized	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-126}(0.f)$	
negative denormalized	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-126}(0.f)$	

Double Precision vastaavasti (Sta06 Table 9.4)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 33

### NaN: Not a Number

Operation	Quiet NaN Produced by	
Any	Any operation on a signaling NaN	
Add or subtract	Magnitude subtraction of infinities: $(+\infty) + (-\infty)$ $(-\infty) + (+\infty)$ $(+\infty) - (+\infty)$ $(-\infty) - (-\infty)$	
	Multiply	$0 \times \infty$
	Division	$\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$
	Remainder	$x \text{ REM } 0$ or $\infty \text{ REM } y$
Square root	$\sqrt{x}$ where $x < 0$	

(Sta06 Table 9.6)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 34

### Tietokoneen rakenne

## Liukulukuaritmetiikka

- n IEEE-754 Standardi
- n Yhteen/vähennyslasku
- n Kertolasku
- n Jakolasku

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 35

### Liukulukuaritmetiikka

- n **Laskentaa varten leveämpiä työrekistereitä**
  - u Guard bits
  - u Enemmän merkitseviä bittejä mm. mantissalle
  - u Käytetään myös normeeraamattomia muotoja
- n **Yhteen- ja vähennyslasku**
  - u Enemmän välivaiheita kuin kerto/jakolaskussa
  - u Operandeille ensin sama eksponentti
    - § Pienemmän eksponentin omaavan normeeraus "purettava"
      - tarkkuutta ja siis tietoa häviää
  - u Tulos voi vaatia normeerauksen
- n **Kerto- ja jakolasku**
  - u Mantissa ja eksponentti käsiteltävä erikseen

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 36

### Liukulukuaritmetiikka

Floating Point Numbers	Arithmetic Operations
$X = X_S \times B^{X_E}$	$X + Y = (X_S \times B^{X_E - Y_E} + Y_S) \times B^{Y_E}$ $X - Y = (X_S \times B^{X_E - Y_E} - Y_S) \times B^{Y_E}$ $X_E \leq Y_E$
$Y = Y_S \times B^{Y_E}$	
	$X \times Y = (X_S \times Y_S) \times B^{X_E + Y_E}$
	$\frac{X}{Y} = \left(\frac{X_S}{Y_S}\right) \times B^{X_E - Y_E}$

$X = 0.3 \times 10^2 = 30$   
 $Y = 0.2 \times 10^3 = 200$  (Sta06 Table 9.5)

$X + Y = (0.3 \times 10^2 + 0.2) \times 10^3 = 0.23 \times 10^3 = 230$   
 $X - Y = (0.3 \times 10^2 - 0.2) \times 10^3 = (-0.17) \times 10^3 = -170$   
 $X \times Y = (0.3 \times 0.2) \times 10^{2+3} = 0.06 \times 10^5 = 6000$   
 $X \div Y = (0.3 \div 0.2) \times 10^{2-3} = 1.5 \times 10^{-1} = 0.15$

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 37

### Yhteen- ja vähennyslasku

Pienempi operandi hävisi kokonaan!

(Sta06 Fig 9.22)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 38

### Erikoistilanteita

- Ekspontin yllvuoto** (Hyvin suuri luku)
  - Arvoksi  $\infty$  tai  $-\infty$  vai ohjelmoitava optio
  - Aiheuta poikkeus
- Ekspontin alivuoto** (Olemattoman pieni luku)
  - Arvoksi 0 (tai aiheuta poikkeus) ohjelmoitava optio
- Mantissan yllvuoto**
  - Yhteenlaskun tuloksena mantissa, jossa binääripisteen edellä useita numeroita
  - Normeeraa!
- Mantissan alivuoto**
  - Yhteiseen eksponenttiin siirtyminen voi aiheuttaa merkitsevien bittien katoamista (entä, jos kaikki merkitsevät menee?)
  - Pyöristä?

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 39

### Pyöristys

- Esimerkki**
  - Arvo neljän desimaalin tarkkuudella 3.1234, -4.5678
  - Esittämiseen käytössä vain 3 desimaalia
  - Normaalien pyöristyssääntöjen mukaan 3.123, -4.568
  - Aina  $\infty$  kohti (ylöspäin) 3.124, -4.567
  - Aina  $-\infty$  kohti (alaspäin) 3.123, -4.568
  - Aina 0 kohti 3.123, -4.567
- Esim. Intel Itanium -laitteisto tukee näitä kaikkia**

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 40

### Kertolasku


(Sta06 Fig 9.23)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 41

### Jakolasku

(Sta06 Fig 9.24)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 42

 **Kertauskysymyksiä**

- n Miksi käytetään 2:n komplementtimuotoa?
- n Miten 2:n komplementtiesitys laajenee "suurempaan tilaan" (esim. 8b esitys  $\rightarrow$  16 b:n esitys)?
- n Millainen on yksinkertaisen tarkkuuden liukuluvun esitysmuoto?
- n Milloin tulee liukuluvun alivuoto?

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen      11/16/2007      Luento 6 - 43