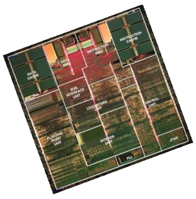
Tietokoneen rakenne

Luento 6

Tietokone-aritmetiikka

(Computer Arithmetic)

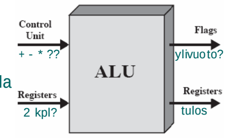


Stallings: Ch 9

- Kokonaislukuesitys
- Kokonaislukuaritmetiikka
- Liukulukuesitys
- Liukulukuaritmetiikka

ALU: Aritmeettis-Looginen Yksikkö

- ALU = Aritmetic Logic Unit
- Suorittava yksikkö, tiedon käsittely
  - Kokonaisluku ja liukulukuaritmetiikkaa
  - Vertailut, sivuttaissiirrot
  - Bittien kopiointi rekisteristä toiseen
  - Osoitelaskenta: Hypyt, muistiviittaukset
- Input
  - Yleensä kaksi operandia sisään
  - Rekistereistä (ja muistista)
- Operatio
  - Usein käskyrekisterin perusteella
- Output
  - Rekisteriin/Muistiin/PSW:hen



(Sta06 Fig 9.1)

Tietokoneen rakenne

Kokonaislukujen esitys

Kokonaislukuesitys (Integer Representation)

- Arvo binäärimuodossa, bittijonona
- ”Merkin” paino määräytyy paikan mukaan

$57 = 5*10^1 + 7*10^0$
$= 32 + 16 + 8 + 1$
$= 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$
$= 0011\ 1001$
= 0x39
$= 3*16^1 + 9*16^0$ **heksadesimaaliesitys**

- Eniten merkitsevä bitti / vähiten merkitsevä bitti
  - MSB, most significant bit
  - LSB, Least significant bit

Kokonaislukuesitys (Integer Representation)

- Entä negatiiviset arvot?
  - Etumerkki-suuruus
  - 2:n komplementtimuoto

-57 = 1011 1001

etumerkki

-57 = 1100 0111

- Tietokoneet käyttävät 2:n komplementtia
  - Ei erikseen +0 ja -0
  - Laskuissa ei tarvitse erikseen huomioida etumerkkiä
  - Vähennyslasku voidaan suorittaa yhteenlaskuna!
  - Helpompi laitteistolle

+2 = 0000 0010
+1 = 0000 0001
0 = 0000 0000
-1 = 1111 1111
-2 = 1111 1110

2:n komplementti

- Esimerkki
  - 8-bittinen esitys, esitä arvo -57

57 = 0011 1001	itseisarvo
1100 0110	invertoi bitit (1:n komplementti)
1100 0110	
1	lisää 1
1100 0111	2:n komplementtimuoto

Hylkää mahd. ylivuotava bitti

- Laajentuu helposti esim. 16-bittiseksi

57 = 0011 1001 = 0000 0000 0011 1001
-57 = 1100 0111 = 1111 1111 1100 0111

sign extension

2:n komplementti

- Arvoalue: $-2^{n-1} \ldots 2^{n-1}-1$

  8 bits: $-2^7 \ldots 2^7-1 = -128 \ldots 127$
  32 bits: $-2^{31} \ldots 2^{31}-1 = -2\,147\,483\,648 \ldots 2\,147\,483\,647$

- Yhteenlaskun ylivuoto helppo havaita
  - Ei ylivuotoa, jos erimerkkiset yhteenlaskettavat
  - Ylivuoto, jos samanmerkkiset yhteenlaskettavat ja tuloksen merkki eri kuin yhteenlaskettavien merkki

```
   57 = 0011 1001
+  80 = 0101 0000
------------------
  137 = 1000 1001
```
Ylivuoto!

2:n komplementti

- Vähennyslasku yhteenlaskuna!
  - Unohda etumerkki, käsittele etumerkittöminä!
  - Ensin 2:n komplementti vähennettävästä, sitten add
  - Helppo laitteisto

```
-3 =  1101
+1 =  0001
-2 =  1110
```

3= 0011

```
1100
   1
1101
```
-3 2:n komplementtiesityksessä

  - Tarkistus
    - Tuliko ylivuoto?
    - Merkki = 1, siis negatiivinen
    - Itseisarvo: invertoi bitit ja lisää 1

(Sta06 Table 9.1)

Tietokoneen rakenne

Kokonaisluku-aritmetiikkaa

- Negaatio
- Yhteen/vähennyslasku
- Kertolasku
- Jakolasku

Negaatio = 2:n komplementti

- 1: invertoi kaikki bitit
- 2: lisää 1
- 3: tarkista erikoistilanteet
  - Jätä ylivuotobitti huomiotta
  - Muuttuiko merkki?
    - Pienimmälle luvulle ei negaatiota
    - Ellei, aiheuta poikkeus
- Helppo laitteisto

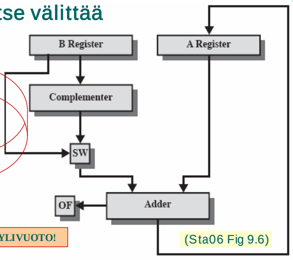
```
-57 = 1100 0111
      0011 1000
              1
      0011 1001
= 57
```

```
-128 = 1000 0000
       0111 1111
               1
       1000 0000
```


Yhteenlasku (ja vähennyslasku)

- Normaali binääriyhteenlasku
  - Jos vähennyslasku, muodosta vähennettävästä ensin komplementti, sitten yhteenlaskuna
- Ylivuotobitistä ei tarvitse välittää
  - Tarkkaile sensijaan summan merkkiä
- Helppo laitetoiminto
  - 2:n komplementtipiiri ja yhteenlaskupiiri

```
  1100 =-4       1100 = -4
 +1111 =-1      +1011 = -5
 11011 =-5      10111 =  ?
```
YLIVUOTO!



(Sta06 Fig 9.6)

Kokonaislukujen kertolasku

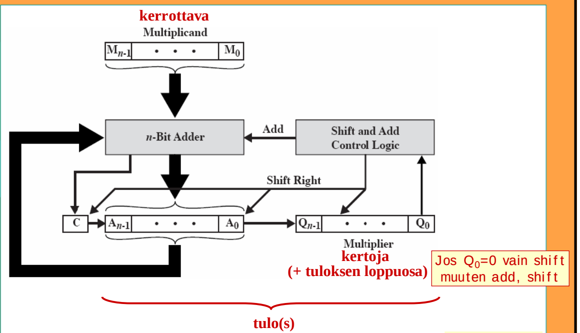
- Binääriluvuillakin kuten koulussa opittu
  - Helppo kertoa 0:lla tai 1:llä
- Laitteistolla?
  - Monimutkainen
  - Tarjolla useita algoritmeja
- Ylivuoto?
  - 32 b operandit ž tulos 64 b?
- Helppo laitteisto, jos etumerkittömiä
  - Vain monta yhteenlaskua
  - Tai sivuttaissiirtoa ja yhteenlaskua
    - siirto vasemmalle = kerro 2:lla
    - esim: 5 * => add, shift, shift, add

```
    1011     Multiplicand (11)
   ×1101     Multiplier (13)
    1011  }
   0000   }  Partial products
  1011    }
 1011     }
10001111     Product (143)
```
(Sta06 Fig 9.7)

```
2* 10011  => 100110
```

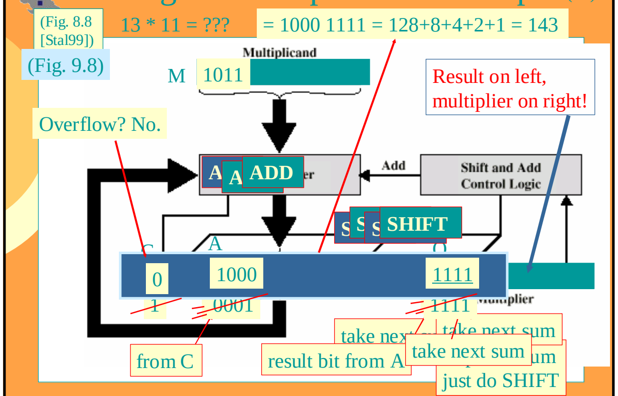
```
Esimerkki: 5*11
  add=> 1011
  shift=> 10110
  shift=> 101100
  add=>110111 (= 55)
```

Etumerkittömien lukujen kertolasku

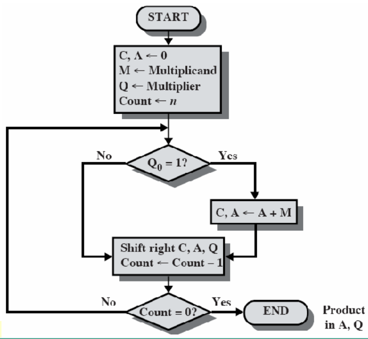


(Sta06 Fig 9.8a)

Unsigned Multiplication Example (19)



Etumerkittömien lukujen kertolasku



(Sta06 Fig 9.9)

Etumerkittömien kertolasku [Sta06 Fig 9.8a]

Q * M = 1101 * 1011 = 1000 1111 eli 13*11 = 143

C	A	Q	M		
0	0000	1101	1011	Initial Values	
0	1011	1101	1011	Add	First
0	0101	1110	1011	Shift	Cycle
0	0010	1111	1011	Shift	Second Cycle
0	1101	1111	1011	Add	Third
0	0110	1111	1011	Shift	Cycle
1	0001	1111	1011	Add	Fourth
0	1000	1111	1011	Shift	Cycle

(b) Example from Figure 9.7 (product in A, Q)

(Sta06 Fig 9.8b)

Negatiivisten kertolasku?

- Ed. algoritmi ei toimi negatiivisille luvuille
- Voisi tehdä näin
  - u muuta operandit positiivisiksi kokonaisluvuiksi
  - v käytä ed. algoritmia
  - w tutki operandien merkki, muuta tulos tarvittaessa komplementtimuotoon
- Parempia ja nopeampia tapoja olemassa

Boothin Algoritmi

- Huomio edell. algoritmista
  - Yhteenlasku vain (aina), kun kertojassa esiintyy 1
- Boothin algoritmin idea (tehostus)
  - Yhdistä vierekkäiset 1:set yhdeksi köntäksi
  - Tee köntälle yksi yhteenlasku ja yksi vähennyslasku
  - Esim. 7*x = 8*x +(–x)

    111*x = 1000*x +(-x) =

    add, shift, shift, shift, complement, add

    (todellisuudessa päinvastainen järjestys, vähennyslasku ensin)

5 * 7 = 0101 * 0111
= 0101 * (1000-0001)

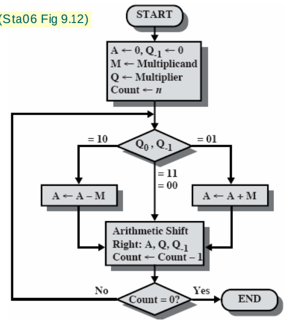
⇨

00101000 40
11111011 -5
100100011 = 35

- Toimii 2:n komplementtimuodoille, myös negatiivisille!

Boothin Algoritmi

(Sta06 Fig 9.12)



10 = könttä alkoi
11 = könttä jatkuu
01 = könttä loppui

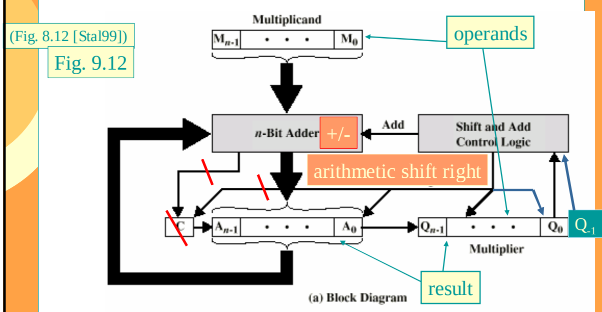
Arithmetic Shift Right:
= täytä etumerkillä

1000 1000
1100 0100

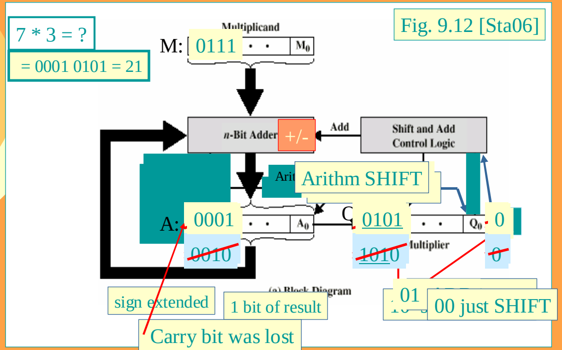
Miksi toimii?
M*(011111111) = 2^7 - 1
M*(00011110) = 2^5 - 2^1
M*(01111010) = 2^7 - 2^3 + 2^2 - 2^1

Booth's Algorithm for Twos Complement Multiplication

(Fig. 8.12 [Stal99])
Fig. 9.12



Booth's Algorithm Example (15)



Boothin Algoritmi, esim.

Sta06 Fig 9.12

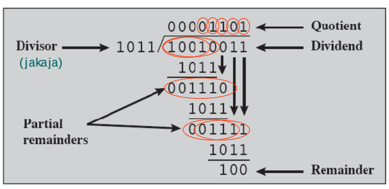
Q * M = 0011 * 0111 = 0001 0101 eli 3*7 = 21

A	Q	Q_{-1}	M		
0000	0011	0	0111	Initial Values	
1001	0011	0	0111	A ← A − M	First Cycle
1100	1001	1	0111	Shift	
1110	0100	1	0111	Shift	Second Cycle
0101	0100	1	0111	A ← A + M	Third Cycle
0010	1010	0	0111	Shift	
0001	0101	0	0111	Shift	Fourth Cycle

(Sta06 Fig 9.13)

Kokonaislukujen jakolasku (6)

- Binääriluvuillakin kuten koulussa opittu
  - Helppo: osamäärään tulee vain 0:ia ja 1:siä

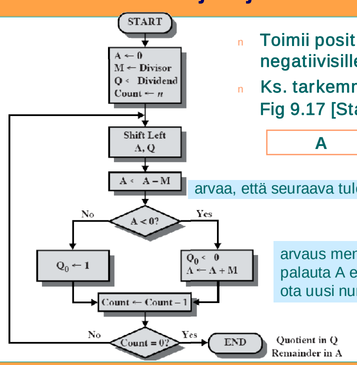


osamäärä
jaettava
jako-
jäännös

- Laitteistototeutus vastaavasti kuin kertolaskussa
  - Siirto vasemmalle = uusi numero mukaan

(Sta06 Fig 9.15)

Kokonaislukujen jakolasku



- Toimii positiivisilla luvuilla, negatiivisille lisävirittelyjä
- Ks. tarkemmin kirjan esimerkki Fig 9.17 [Sta06]

A	Q	Q_0

SHL

arvaa, että seuraava tuloksen bitti on 1

arvaus meni pieleen, palauta A ennalleen ja ota uusi numero "alas"

Sta06 Fig 9.16

Esimerkki: kahden komplementin jakolasku

Jakolasku: 7/3   A+ Q = 7 = 0000 0111   M= 3 = 0011

A	Q	
0000	0111	initial value
0000	1110	shift left
1101		subtract M
0000	1110	restore
0001	1100	sift left
1110		subtract M
0001	1100	restore
0011	1000	shift left
0000		subtract M
0000	1001	$\boxed{\text{set } Q_0=1}$
0001	0010	shift
1110		subtract M
0001	0010	restore

Subtract M = Add (–M)
-M = -3 = 1101

Ensin kokeillaan, onnistuuko jako eli vähennetään ja tutkitaan muuttuuko A:n etumerkki vähennyksen jälkeen.
Jos muuttuu, niin vähennys peruutetaan.

Toistetaan, niin monta kertaa kuin Q:ssa on bittejä.

Jos vähennys onnistuu, Q_0 = 1

Q = quotient = 2
A = remainder = 1

Sta06 Fig 9.17 a

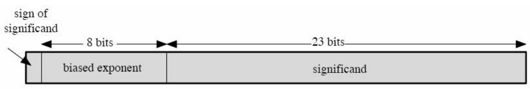
Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 25

Tietokoneen rakenne

Liukulukuesitys

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 26

Liukulukuesitys



- Merkitsevät numerot ja suuruusluokka
- Normeerattu muoto
  - pistettä edeltävä numero > 0

-0.000 000 000 123 = -1.23 * 10^{-10}
0.123 = +1.23 * 10^{-1}
123.0 = +1.23 * 10^{2}
123 000 000 000 000 = +1.23 * 10^{14}

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 27

IEEE 754 Liukulukuformaatit

Parameter	Single	Single Extended	Double	Double Extended
Word width (bits)	32	≥ 43	64	≥ 79
Exponent width (bits)	8	≥ 11	11	≥ 15
Exponent bias	127	unspecified	1023	unspecified
Maximum exponent	127	≥ 1023	1023	≥ 16383
Minimum exponent	–126	≤ –1022	–1022	≤ –16382
Number range (base 10)	10^{-38}, 10^{+38}	unspecified	10^{-308}, 10^{+308}	unspecified
Significand width (bits)*	23	≥ 31	52	≥ 63
Number of exponents	254	unspecified	2046	unspecified
Number of fractions	2^{23}	unspecified	2^{52}	unspecified
Number of values	1.98×2^{31}	unspecified	1.99×2^{63}	unspecified

* not including implied bit

(Sta06 Table 9.3)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 28

32-bittinen liukulukuesitys

- 1 b etumerkille
  - 1 = "-", 0 = "+"
- 8 b exponentille
  - Ei erikseen etumerkkiä, vaan erillinen nollataso (bias)
    - Esim. Exp=5 g talleta 127+5, Exp=-5 g talleta 127-5
- 23 b mantissalle (significant)
  - Normeeratussa muodossa binääripistettä edeltävä numero aina 1, ei talleteta (piilobitti, Zuse Z3 1939)
- Binäärimuodossa esitetyn liukuluvun arvo

$-1^{\text{Sign}} * 1.\text{Mantissa} * 2^{\text{Exponent}-127}$

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 29

Esimerkkejä

23.0 = +10111.0 * 2^0 = +1.0111 * 2^4 =?

127+4=131

sign	exponent	mantissa
0	1000 0011	011 1000 0000 0000 0000 0000

1.0 = +1.0000 * 2^0 = ?

0+127 = 127

sign	exponent	mantissa
0	0111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 30

Esimerkkejä

0	1000 0000	111 1000 0000 0000 0000 0000
sign	exponent	mantissa

X = ?

$X = (-1)^0 * 1.1111 * 2^{(128-127)}$

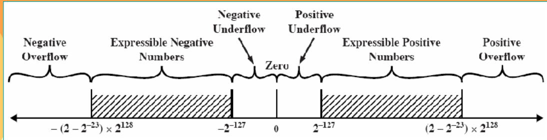
$= 1.1111_2 * 2$

$= (1+ 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16) * 2$

$= (1 + 0.5 + 0.25 + 0.125+0.0625) * 2$

$= 1.9375 * 2$ $= 3.875$

Liukulukujen tarkkuudesta (32b)



- Arvoalue
  - 8 b eksponentti g $2^{-126} \ldots 2^{127} \sim -10^{-38} \ldots 10^{38}$
- Tarkkuus
  - 24 b mantissa g $2^{24} \sim 1.7 * 10^{-7} \sim 6$ desimaalia
  - Parempi tarkkuus pienille luvuille ilman normalisointia

IEEE 754 Erityismerkitykset

	Single Precision (32 bits)			
	Sign	Biased exponent	Fraction	Value
positive zero	0	0	0	0
negative zero	1	0	0	–0
plus infinity	0	255 (all 1s)	0	∞
minus infinity	1	255 (all 1s)	0	$-\infty$
quiet NaN	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
signaling NaN	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
positive normalized nonzero	0	$0 < e < 255$	f	$2^{e-127}(1.f)$
negative normalized nonzero	1	$0 < e < 255$	f	$-2^{e-127}(1.f)$
positive denormalized	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-126}(0.f)$
negative denormalized	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-126}(0.f)$

Not a Number

Double Precision vastaavasti

(Sta06 Table 9.4)

NaN: Not a Number

Operation	Quiet NaN Produced by
Any	Any operation on a signaling NaN
Add or subtract	Magnitude subtraction of infinities: $(+\infty) + (-\infty)$ $(-\infty) + (+\infty)$ $(+\infty) - (+\infty)$ $(-\infty) - (-\infty)$
Multiply	$0 \times \infty$
Division	$\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$
Remainder	x REM 0 or ∞ REM y
Square root	$\sqrt{x}$ where $x < 0$

(Sta06 Table 9.6)

Tietokoneen rakenne

Liukulukuaritmetiikkaa

- IEEE-754 Standardi
- Yhteen/vähennyslasku
- Kertolasku
- Jakolasku

Liukulukuaritmetiikka

- Laskentaa varten leveämpiä työrekistereitä
  - Guard bits
  - Enemmän merkitseviä bittejä mm. mantissalle
  - Käytetään myös normeeraamattomia muotoja
- Yhteen- ja vähennyslasku
  - Enemmän välivaiheita kuin kerto/jakolaskussa
  - Operandeille ensin sama eksponentti
    - Pienemmän exponentin omaavan normeeraus "purettava"
      - tarkkuutta ja siis tietoa häviää
  - Tulos voi vaatia normeerauksen
- Kerto- ja jakolasku
  - Mantissa ja eksponentti käsiteltävä erikseen

Liukulukuaritmetiikka

Floating Point Numbers	Arithmetic Operations
$X = X_S \times B^{X_E}$ $Y = Y_S \times B^{Y_E}$	$X + Y = \left(X_S \times B^{X_E - Y_E} + Y_S\right) \times B^{Y_E}$ } $X_E \le Y_E$ $X - Y = \left(X_S \times B^{X_E - Y_E} - Y_S\right) \times B^{Y_E}$ } $X \times Y = \left(X_S \times Y_S\right) \times B^{X_E + Y_E}$ $\frac{X}{Y} = \left(\frac{X_S}{Y_S}\right) \times B^{X_E - Y_E}$

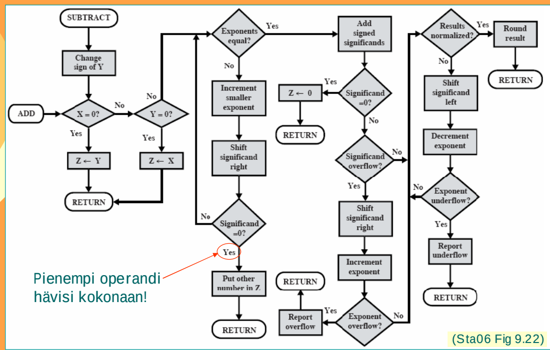
(Sta06 Table 9.5)

$X = 0.3 \times 10^2 = 30$
$Y = 0.2 \times 10^3 = 200$

$X + Y = (0.3 \times 10^{2-3} + 0.2) \times 10^3 = 0.23 \times 10^3 = 230$
$X - Y = (0.3 \times 10^{2-3} - 0.2) \times 10^3 = (-0.17) \times 10^3 = -170$
$X \times Y = (0.3 \times 0.2) \times 10^{2+3} = 0.06 \times 10^5 = 6000$
$X \div Y = (0.3 \div 0.2) \times 10^{2-3} = 1.5 \times 10^{-1} = 0.15$

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 37

Yhteen- ja vähennyslasku



(Sta06 Fig 9.22)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 38

Erikoistilanteita

- **Eksponentin ylivuoto** (Hyvin suuri luku)
  - Arvoksi ∞ tai -∞ vai
  - Aiheuta poikkeus — ohjelmoitava optio
- **Eksponentin alivuoto** (Olemattoman pieni luku)
  - Arvoksi 0 (tai aiheuta poikkeus) — ohjelmoitava optio
- **Mantissan ylivuoto**
  - Yhteenlaskun tuloksena mantissa, jossa binääripisteen edellä useita numeroita
  - Normeeraa!
- **Mantissan alivuoto**
  - Yhteiseen eksponenttiin siirtyminen voi aiheuttaa merkitsevien bittien katoamista
    (entä, jos kaikki merkitsevät menee?)
  - Pyöristä?

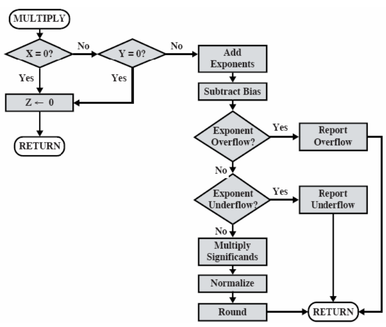
Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 39

Pyöristys

- Esimerkki
  - Arvo neljän desimaalin tarkkuudella — 3.1234, -4.5678
  - Esittämiseen käytössä vain 3 desimaalia
  - Normaalien pyöristyssääntöjen mukaan lähimpään esitettävissä olevaan — 3.123, -4.568
  - Aina ∞ kohti (ylöspäin) — 3.124, -4.567
  - Aina -∞ kohti (alaspäin) — 3.123, -4.568
  - Aina 0 kohti — 3.123, -4.567
- Esim. Intel Itanium -laitteisto tukee näitä kaikkia

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 40

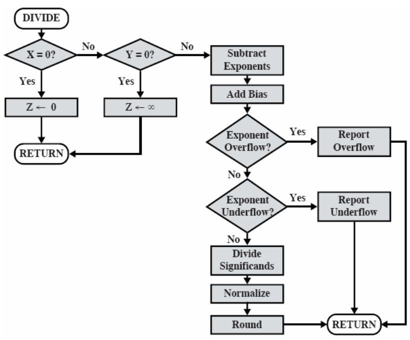
Kertolasku



(Sta06 Fig 9.23)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 41

Jakolasku



(Sta06 Fig 9.24)

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 42

Kertauskysymyksiä

- Miksi käytetään 2:n komplementtimuotoa?
- Miten 2:n komplementtiesitys laajenee "suurempaan tilaan" (esim. 8b esitys ž 16 b:n esitys)?
- Millainen on yksinkertaisen tarkkuuden liukuluvun esitysmuoto?
- Milloin tulee liukuluvun alivuoto?

Tietokoneen rakenne / 2007 / Liisa Marttinen 11/16/2007 Luento 6 - 43