

1. Kirjoita auki joukot

- (a) $(\{1, 2, 2, 3\} \setminus \{2, 5, 5\}) \cup \{1, 7\}$.
- (b) $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) \setminus \mathcal{P}(\{b, c, d\})$.
- (c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \times \{0, 1\}$.

2. Todista, että

- (a) Jos A ja B ovat äärellisiä ja $A \cap B = \emptyset$, niin $A \cup B$ on äärellinen. *Vihje: Käytä äärellisyyden määritelmää.*
- (b) Jos A ja B ovat äärellisiä, niin $A \cup B$ on äärellinen. *Vihje: Voit käyttää kohtaa (a).*
- (c) Jos A on ääretön ja B äärellinen, niin $A \setminus B$ on ääretön. *Vihje: Voit käyttää vastaväitetodistusta.*

3. Osoita induktiolla, että

- (a) $\sum_{i=0}^n 1 = n + 1$.
- (b) $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.
- (c) $\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

Laske edellisten avulla $|\{0\}^{\leq k}|$, $|\{0, 1\}^{\leq k}|$ ja $|\{0, 1, 2\}^{\leq k}|$.

4. Tarkastellaan päätösongelmaa "annettu ei-negatiiviset kokonaisluvut p, q ; onko q jaollinen p :llä?". Muotoile ongelma päätösongelmaformalismin mukaiseksi. (Valitse sopiva aakkosto, lukuparien koodaus jne.) Mikä on ongelmaa vastaava formaali kieli?

5&6. Sulkulauseketta (so. sulkumerkeistä "(" ja ")" koostuvaa merkkijonoa) sanotaan tasapainoiseksi, jos se on tyhjä, se on tasapainoinen sulkulauseke joka on laitettu sulkuihin (eli alkuun lisätty "(" ja loppuun ")"), tai se koostuu kahdesta peräkkäisestä tasapainoisesta sulkulausekkeesta. Esim. $((()))()$ on tasapainoitettu sulkulauseke, mutta $((()))()$ ei ole.

- (a) Muotoile tasapainoisten sulkulausekkeiden tunnistusongelma päätösongelmaformalismin mukaiseksi ja esitä myös vastaava formaali kieli L_{bal} .
- (b) Laadi (pseudokielineen) ohjelma, joka ratkaisee tasapainotettujen sulkulausekkeiden tunnistusongelman.

Tehtävän 5 voi merkitä tehdyksi jos on tehnyt kohdan (a) ja yrittänyt kohtaa (b). Tehtävien 5 & 6 merkitseminen edellyttää, että on valmis esittämään ratkaisun molempiin kohtiin.