Ideasta algoritmiksi
(tai ainakin sinne päin)

Matti Nykänen

4. lokakuuta 2002

Syöte

- Muuttujat $x_0, x_1, x_2, \ldots$

- . . . tulkitaan (tuntemattomiksi) reaaliluvuiksi $\mathbb{R}$.

- Syötteenä annetaan äärellinen epäyhtälöryhmä

  $S: x_0\ R_{01}\ x_1$ **ja** $x_0\ R_{02}\ x_2$ **ja** $x_1\ R_{12}\ x_2$ **ja** $\ldots$ **ja** $x_{n-1}\ R_{(n-1)n}\ x_n$

  missä jokainen relaatio R_{ij} on $<$, $\leqq$ (eli $\leq$), $>$, $\geqq$, $=$ tai $\lessgtr$ (eli $\neq$).

  Sovitaan vielä: $\lesseqqgtr$ on aina totta, $\perp$ ei koskaan.

- Olkoon x_n (vaikkapa) viimeinen muuttuja joka mainitaan epäyhtälöryhmässä S.

Tehtävä

- Muunna S sellaiseen muotoon S' joka *tarkoittaa muuten samaa mutta jossa x_n on turha*.

- Eli sellaiseen muotoon että

$$x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$$

on muunnetun epäyhtälöryhmän S' ratkaisu täsmälleen silloin kun on olemassa sellainen $a_n \in \mathbb{R}$ että

$$x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$$

on alkuperäisen epäyhtälöryhmän S ratkaisu.

- (Paljon yleisempi) ongelma ratkaistu (matemaattisessa logiikassa) jo 1929...

$\boxed{\textbf{Symboliikkaa}}$

- Tehtävä *ei* ratkea pelkällä numeronmurskauksella:

  Emme voi käydä läpi kaikkia mahdollisia ratkaisuvaihtoehtoja

  $$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

  ja etsiä vastaavaa $a_n \in \mathbb{R}$ — vaihtoehtoja on äärettömästi, siis liikaa!

- Mutta muuttuja*symboleita* x_i ja niiden välisiä relaatio*symboleita* R_{ij} onkin vain äärellinen määrä!

  Lasketaan siis niillä.

Variables won't; constants aren't. *Anon.*

Päättelyä

- "Looginen" *päättely* on kouluesimerkki symboleilla laskennasta.

- Esimerkiksi transitiivinen päättely

  $$\textbf{jos } x_i \leqq x_j \textbf{ ja } x_j \leqq x_k \textbf{ niin } x_i \leqq x_k$$

  voidaan lukea laskentasääntönä:

  "Jos muuttujien x_i ja x_j välissä on $\leqq$ ja muuttujien x_j ja x_k välissä myös $\leqq$, niin voit laittaa muuttujien x_i ja x_k väliin $\leqq$".

- Konjunktion **ja** sievennys **jos** $x_i \leqq x_j$ **ja** $x_i \lesseqgtr x_j$ **niin** $x_i < x_j$ on "säilytä välissä vain yhteiset merkit" — leikkaus jos *yhdistelmämerkit ovat alkeismerkkien joukkoja*.

  Suunnan vaihto **jos** $x_j \geqq x_i$ **niin** $x_i \leqq x_j$ on "käännä nuolet".

Päättelyn oikeutuksesta

- Miten symboleilla laskennan säännöt oikeutetaan?

- Ajatellaan symbolista dataa *formaalina kielenä* jolla on

  muoto-oppi (syntaksi) eli ulkoasu

  merkitysoppi (semantiikka) eli mitä *muoto-opin mukaiset väitelauseet* tarkoittavat.

  Merkitysoppi annetaan ”algoritmisena” kääntäjänä formaalin (ns. objekti- eli kohde)kielen väitelauseilta sellaiseen (ns. meta)kieleen, jonka totuus ”tunnetaan”.

- Päättelysääntö eli kuvaus $S \mapsto S'$ on oikeutettu jos se *ei hukkaa totuutta:* jos syötteen S merkitys on totta, niin myös tuloksen S' merkitys on totta.

Logiikasta

Logic, *n.*, The art of thinking and reasoning in strict accordance with the limitations and incapacities of the human misunderstanding. *Ambrose Bierce*

- Logiikka eli *(i) oppi oikeasta päättelystä*.

- Koostuu

  malliteoriasta eli merkitysopin teoriasta

  todistusteoriasta eli päättelysääntöjen käytön teoriasta

  laskettavuusteoriasta eli todistamisen mekanisoitavuuden teoriasta.

Logiikoista

- Teoreettinen tietojenkäsittelytiede syntyi 1930-luvun jälkipuoliskolla laskettavuusteoriana.

  Koneet tulivat noin 10v. myöhemmin (osin samoilta tekijöiltä)...

- Ns. *(ii) 1.kertaluvun predikaattilogiikka* alkoi lukumääräsanojen "kaikilla", "viidellä",... logiikkana matematiikan tarpeisiin.

- Uusia *(iii) logiikkoja* voi rakentaa mallintamaan muita kiinnostavia väitteiden aiheita: aikaa, uskomuksia,...

  Eri logiikat ovat tietojenkäsittelyssä(kin) tärkeitä: tekoäly — tietämyksen esittäminen; järjestelmien ja ohjelmien verifiointi — käyttäytymisen esittäminen; ...

Tiheän reunapisteettömän järjestyksen teoria

- Alias *Dense Linear Order (DLO)*.

- 1.kertaluvun logiikan lausejoukko:

aitous	$\forall x. \neg x < x$
totaalisuus	$\forall x, y. x < y \vee x = y \vee y < x$
transitiivisuus	$\forall x, y, z. x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$
tiheys	$\forall x, y. x < y \rightarrow \exists z. x < z \wedge z < y$
vasen ja oikea reunapisteettömyys	$\forall x. \exists z. z < x$ ja $\forall x. \exists z. x < z$

- Kielenä puhuu (vain) järjestyksestä tiheissä joukoissa $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$,. . . .

- Sallii *kvanttorien poiston:* jokaisella DLO-kaavalla ϕ on yhtäpitävä kvanttoriton vastine ψ.

  Ongelmamme onkin $\exists$-kvanttorin poisto konjunktion edestä.

Levitä ja hävitä -idea

Levitä ensin piilevät järjestys*rajoitteet* (constraint) näkyviin:

$x_0 \leqq x_2$ **ja** $x_2 \leqq x_1$ leviää muotoon $x_0 \leqq x_2$ **ja** $x_2 \leqq x_1$ $\boxed{\textbf{ja } x_0 \leqq x_1}$

1. *Päättele* nykyisistä epäyhtälöistä jokin $\boxed{seuraus}$.

2. *Liitä* **ja** sievennä $\boxed{seuraus}$ nykyisiin epäyhtälöihin.

3. *Toista* kunnes kaikki rajoitteet näkyvissä.

Tämä *rajoitteenlevitysidea* on yleinen tekoälyssä.

Hävitä sitten kaikki poistettavan muuttujan rajoitteet:

$\boxed{x_0 \leqq x_2 \textbf{ ja } x_2 \leqq x_1 \textbf{ ja }}\, x_0 \leqq x_1$ häviää muotoon $x_0 \leqq x_1$.

Kaikki rajoitteet näkvissä, joten merkitys säilyy.

Rajoitteiden levityssäännöt

Rajoitteiden levityksessä käytetään kaikkia sellaisia

$$\textbf{jos } x_i \, R \, x_j \textbf{ ja } x_j \, S \, x_k \textbf{ niin } x_i \, (R \otimes S) \, x_k$$

- jotka ovat oikeutettuja päättelysääntöinä
- joiden johtopäätös $R \otimes S$ on *tiukin* mahdollinen.

$\otimes$	$\perp$	$<$	$=$	$>$	$\leqq$	$\geqq$	$\lessgtr$	$\lesseqqgtr$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$<$	$\perp$	$<$	$<$	$\lesseqqgtr$	$<$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$
$=$	$\perp$	$<$	$=$	$>$	$\leqq$	$\geqq$	$\lessgtr$	$\lesseqqgtr$
$>$	$\perp$	$\lesseqqgtr$	$>$	$>$	$\lesseqqgtr$	$>$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$
$\leqq$	$\perp$	$<$	$\leqq$	$\lesseqqgtr$	$\leqq$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$
$\geqq$	$\perp$	$\lesseqqgtr$	$\geqq$	$>$	$\lesseqqgtr$	$\geqq$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$
$\lessgtr$	$\perp$	$\lesseqqgtr$	$\lessgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$
$\lesseqqgtr$	$\perp$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$	$\lesseqqgtr$

Rajoitteiden levitysalgoritmi

algoritmi kolmioi(x_i, x_j)

  for all muu muuttuja x_k kuin x_i tai x_j **do**

    laske uusi rajoite $R'_{ik} = R_{ik} \cap (R_{ij} \otimes R_{jk})$;

    if uusi rajoite R'_{ik} on aidosti tiukempi kuin vanha R_{ik} **then**

      korvaa vanha rajoite R_{ik} uudella R'_{ik};

      kolmioi(x_i, x_k) rekursiivisesti

    end if

    laske uusi rajoite $R'_{kj} = R_{kj} \cap (R_{ki} \otimes R_{ij})$;

    if uusi rajoite R'_{kj} on aidosti tiukempi kuin vanha R_{kj} **then**

      korvaa vanha rajoite R_{kj} uudella R'_{kj};

      kolmioi(x_k, x_j) rekursiivisesti

    end if

  end for

(Kukin R_{pq} vaihtaa suuntaa jos $p > q$.)

Algoritmin aikatarpeesta

- Pysähtyy:

  Rekursiokutsu kolmioi(x_i, x_k) tehdään vain jos rajoite R_{ik} tiukentui aidosti.

  Rajoite R_{ik} voi tiukentua vain 4 kertaa.

  Yhdessä rekursiokutsussa tehdään vain $2(n-2)$ silmukka-askelta.

- $O(n^3)$ silmukka-askeleessa:

  Muuttujapareja x_i, x_k vain $\frac{n(n+1)}{2}$ erilaista.

  Siis korkeintaan $4(n-2)n(n+1)$ silmukka-askelta.

Algoritmin oikeellisuus

Lopputuloksena saatu epäyhtälöryhmä S' on yhtäpitävä syötteenä annetun S kanssa:

- Joka vaiheessa liitetään oikeellisen päättelysäännön johtopäätös oletuksinaan nykyinen (välivaiheen) epäyhtälöryhmä S''.

- Siis liitettävä on aina totta epäyhtälöryhmässä S''.

Eli epäyhtälöryhmillä S ja S' on samat ratkaisut.

Algoritmin täydellisyys

Haluaisimme osoittaa:

Jos sijoitus

$$x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$$

ratkaisee tuloksena saadun epäyhtälöryhmän S' ne rajoitteet, joissa ei mainita muuttujaa x_n, niin on olemassa sellainen $a_n \in \mathbb{R}$ että

$$x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$$

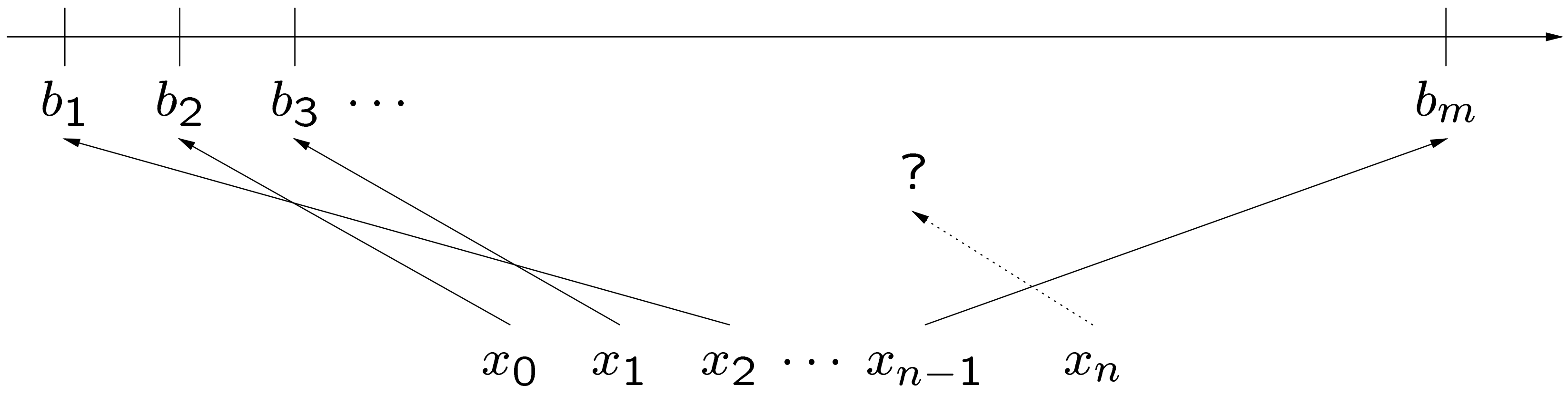
ratkaisee nekin rajoitteet, joissa mainitaan x_n.

Silloin x_n ja sen rajoitteet ovat turhat.

(Toinen suunta on triviaali.)

Yhtäsuuruus

- Olkoot $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_m \in \mathbb{R}$ ne lukuarvot, jotka osaratkaisu antaa muuttujille $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:



- Jos jokin lisärajoite on $x_i = x_n$, niin on pakko valita muuttujan x_i lukuarvo $b_{i'}$.

  Tämä myös käy, sillä $\otimes$-taulukon mukaan kaikilla muilla muuttujilla on lisärajoite $x_j \; R \; x_n$ täsmälleen kun on lisärajoite $x_j \; R \; x_i$.

  Siis muuttuja x_i on alias muuttujalle x_n.

Ääripäät

- Sanotaan: rajoite $x_i \, R \, x_n$ on OK silloin kun joukkoina $R \subseteq R_{in}$.

- Jos lisärajoite $x_i < x_n$ on OK

  — eli R_{in} on $<$, $x_i \leqq x_n$, $\lessgtr$ tai $x_i \stackrel{<}{\substack{= \\ >}} x_n$ —

  jokaiselle muulle muuttujalle x_i, niin voidaan valita aidosti pienempi lukuarvo kuin b_1.

  (Vasen reunapisteettömyys.)

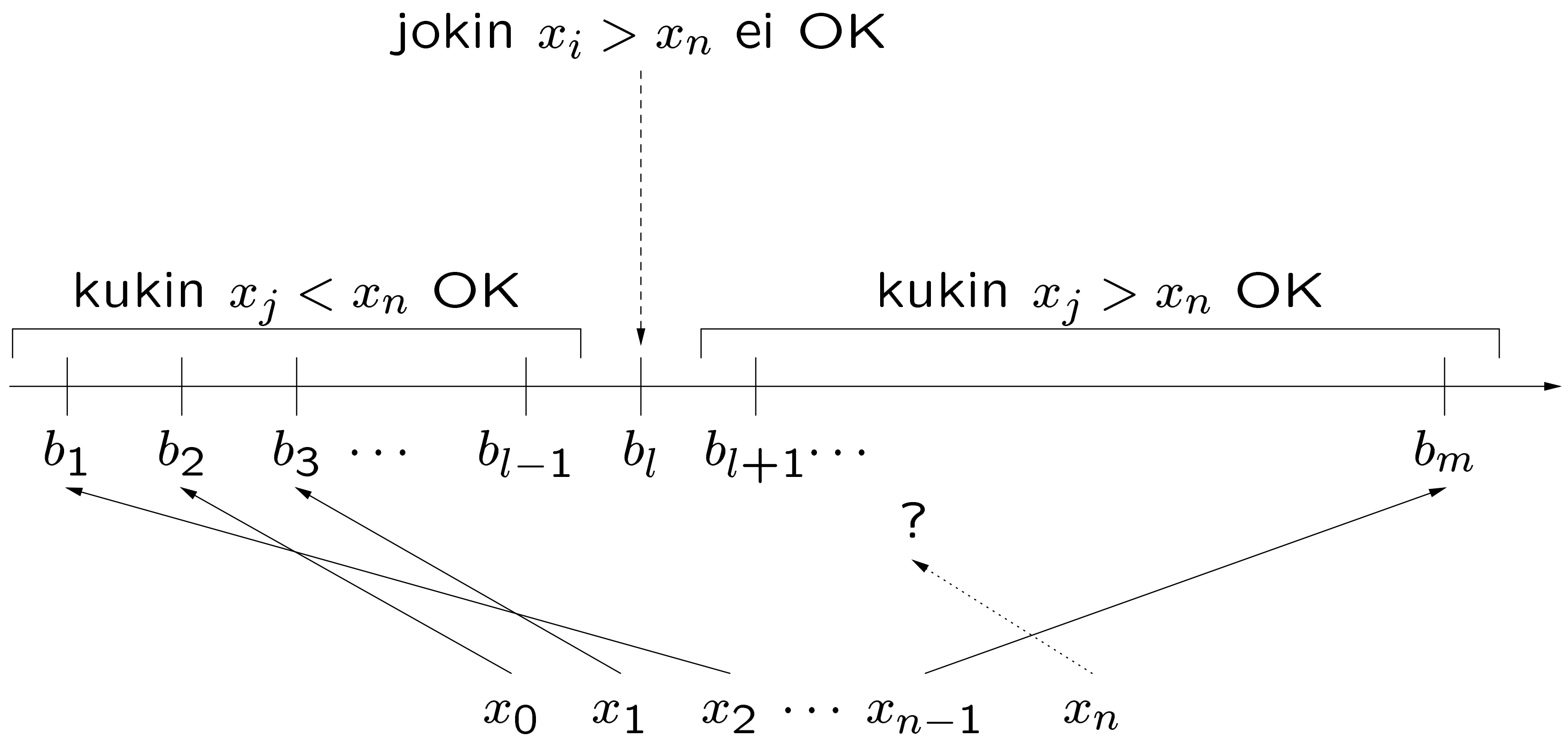
- Samoin jos lisärajoite $x_i > x_n$ on OK, niin voidaan valita aidosti suurempi lukuarvo kuin b_m.

  (Oikea reunapisteettömyys.)

Apuväite

Jos lukuarvoilla $b_{j'} < b_{i'}$ mutta $x_i > x_n$ ei ole OK, niin $x_j < x_n$ on OK.

Olkoon b_l suurin tällainen $b_{i'}$:



Apuväitteen todistus

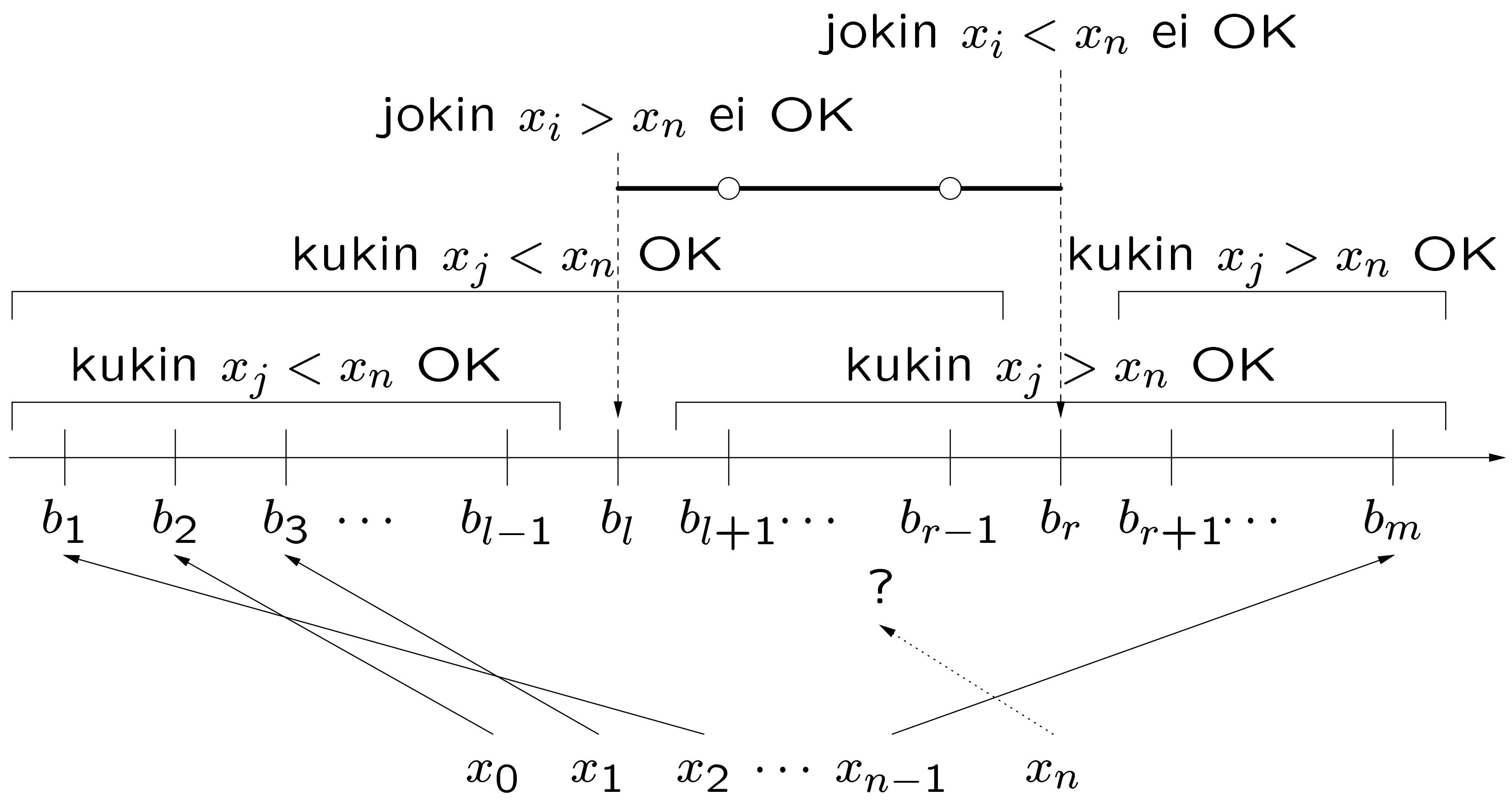
- Oletusta vastaavassa atomikaavassa on nuolenkärki toisin päin, eli se on joko $x_i < x_n$ tai sitten $x_i \leqq x_n$ — kärjetön $x_i = x_n$ käsiteltiin edellä.

  Samoin johtopäätöksen vastaoletus: atomikaava on $x_j > x_n$ tai $x_j \geqq x_n$.

- Polkukonsistenssi sisältää järjestyksen transitiivisuuden, joten mahdollisuus $x_j < x_i$ poistuu.

- Mutta silloin $b_{j'} < b_{i'}$ olisi mahdotonta.

Symmetrinen apuväite



Valitaan **välin** $\mathcal{V} = [b_l, b_r] \setminus \{b_{l+1}, \ldots, b_{r-1}\} \neq \emptyset$ sisäpiste (tiheys).

$\boxed{\textbf{Yksiö}}$

Jäljellä on enää sisäpisteetön *yksiö* $\mathcal{V}$ eli $b_l = b_r$.

Pakkovalinta b_l käy jos ja vain jos $x_j = x_n$ on OK kaikilla muuttujilla x_j joiden lukuarvo on b_l.

- Näiden joukossa on siis sekä sellaisia x_i joilla $x_i > x_n$ ei ole OK että sellaisia $x_{i'}$ joilla $x_{i'} < x_n$ ei ole OK.

  Toisaalta $x_i = x_{i'}$ on OK joten epäyhtälöryhmässä on $\underbrace{x_i \leqq x_n \textbf{ ja } x_n \leqq x_{i'}}_{(\dagger)}$.

- Onko joukossa muita x_j joilla $\underbrace{x_i \leqq x_j \textbf{ ja } x_j \leqq x_{i'}}_{(\ddagger)}$ on OK

  mutta $x_j = x_n$ ei?

Huonot uutiset

- *Kyllä on:* patologisena esimerkkinä olkoon (†) **ja** $x_j \lesseqgtr x_n$!

- Väitämme tämän olevan sama kuin $x_i \leqq x_{i'}$ ilman muuttujaa x_n.

- Mutta todellisuudessa se onkin

  - $x_i < x_{i'}$ kun $\mathcal{V}$ on aito **tai**

  - $x_i = x_{i'}$ **ja** $x_j \lesseqgtr x_i$ kun $\mathcal{V}$ on yksiö.

- Näitä haaroja ei edes voi yhdistää: $R_{ii'}$ olisi välttämättä $\leqq$, mutta mikä olisi silloin R_{ji}?

- Eli tämä ongelma ei voi ratketa pelkällä rajoitteenlevityksellä!

Hyvät uutiset

- Umpikujan yksi erikoistapaus (‡) poistuu uudella rajoitteenlevityssäännöllä:

  jos (patologinen esimerkki) **ja** (‡) **niin** $x_i < x_{i'}$.

- Tässä säännössä on 4 muuttujaa (eikä 3 kuten $\otimes$-säännöissä).

- Niistä yksi on kuitenkin aina x_n, joten sääntö voidaan silti lisätä suoraan rajoitteenlevitysalgoritmiimme.

- Muut erikoistapaukset $x_i \lesseqqgtr x_j$ **ja** $x_j \leqq x_{i'}$ sekä $x_i \leqq x_j$ **ja** $x_j \lesseqqgtr x_{i'}$ johtavat samaan umpikujaan.

- Siis paranneltu algoritmimme *pääsi niin pitkälle kuin rajoitteita levittämällä voi*.

Heuristiikka

- Jatketaan umpikujasta haarautumalla:

  $$x_i \leqq x_j \textbf{ ja} \ldots \text{ on } (x_i = x_j \textbf{ ja} \ldots) \textbf{ tai } (x_i < x_j \textbf{ ja} \ldots)$$

  Jatketaan rekursiivisesti kummassakin puoliskossa.

  Hajoita ja hallitse!

- Kaikki haarautuminen kelpaa, mutta mikä olisi paras?

- Vaikea sanoa: annetaan säännöstö, joka pyrkii valitsemaan edes hyvän.

  Annetaan *heuristiikka*.

Ehdotus

- Jos on erikoistapaus $x_i \lesseqqgtr x_j$ **ja** $x_j \leqq x_{i'}$, niin haaratumiskohdaksi R_{ij}:

  - Puoliskossa $\leqq$ soveltuu lisätty sääntö.

  - Puoliskossa $>$ on x_j välin $\mathcal{V}$ (vasemmalla) ulkopuolella.

  Silloin rekursio näyttää purevan tehokkaasti.

- Puruteho kasvaa jos valitaan vielä kapea $\mathcal{V}$ ja suuri x_j.

- Symmetrisesti toisessakin erikoistapauksessa $x_i \leqq x_j$ **ja** $x_j \lesseqqgtr x_{i'}$.

- Vasta patologisessa erikoistapauksessa luovutetaan, ja jaetaan kapea $\mathcal{V}$.

Yhteenveto

- Näimme laskentaongelman
- joka näytti numeeriselta
- mutta olikin symbolinen
- jopa looginen.
- Teimme sille algoritmin
- joka teki kaiken sen mihin pystyi.
- Siitä eteenpäin on kokeiltava jotakin aivan toista lähestymistapaa.