Lämmittelyä

Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + F$$

Tässä oletetaan:

- Newtonin neste, μ vakio
- kokoonpuristumaton, ρ vakio

(μ = dynaaminen viskositeetti $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = kinemaattinen viskositeetti)

Hajoitetaan komponenteiksi:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u, v, w) = \left(\underline{\frac{\partial u}{\partial t}}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

vektori

$$(\vec{V} \cdot \nabla) = (u, v, w) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)(u, v, w)$$

$$= \left(\underline{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}}, \underbrace{\ldots}_{v}, \underbrace{\ldots}_{w}\right)$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nu \nabla^2 \vec{V} = \nu \nabla^2 (u, v, w)$$

$$= \left(\underline{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}, \overset{\overset{v}{\downarrow}}{\cdots}, \overset{\overset{w}{\downarrow}}{\cdots}\right)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \left(\underline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Eli:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \cdots = \cdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \cdots = \cdots$$

$\boxed{\text{NS komponenttimuodossa}}$

Stationaarinen? $\frac{\partial}{\partial t}$ - termit $= 0$

vakio jonkin akselin suunnassa? $\frac{\partial}{\partial x}$ tai $\frac{\partial}{\partial y}$ tai $\frac{\partial}{\partial z}$ $= 0$

Monisteen notaatiosta

koska $\vec{V}(x,y,z,t)$ on 4 muuttujan funktio, ja koska ∇ on myös yleinen gradienttioperaattori myös n-muuttujan funktioille, voidaan merkitä

$$\nabla_3$$

kun halutaan derivoida vain muuttujien x, y, z suhteen.

Tällä kurssilla ∇ on aina ∇_3

Konteen etäisyys ajan fuktiona

$$s(t) \quad \text{, yksikkö: } m$$

nopeus

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial t} s(t) \quad \text{, yksikkö: } \frac{m}{s}$$

"Derivointi lisää lausekkeen nimittäjään sen yksikön jonka suhteen derivoidaan"

NS: $$\boxed{\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} + (V\cdot\nabla)V}_{\text{inertia}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underbrace{\nu \nabla^2 V}_{\text{sisäinen kitka, viskositeetti}}}$$

$$\frac{(V\cdot\nabla)V}{\nu\nabla^2 V} \sim \frac{U\cdot U/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} = Re$$

ks. monisteen Taulukko 1.

Jatkossa jätetään viskositeettitermi pois sillä se on pieni (rajakerroksessa)

Pari huomiota

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V\cdot\nabla)V = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 V$$

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} + (V\cdot\nabla)\rho V = -\nabla p + \mu\nabla^2 V$$

$ma \qquad \frac{d}{dx}mv \qquad F \qquad F_\mu$

Jos merkitään $\hat{u} = \frac{u}{|V|}$, $\hat{v} = \frac{v}{|V|}$, $\hat{w} = \frac{w}{|V|}$, $\hat{V} = \frac{V}{|V|}$

$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ on V:n suuntainen yksikkövektori.

$$(V\cdot\nabla)V = |V|(\hat{V}\cdot\nabla)V = |V|\left(\hat{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{w}\frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \ldots\right)$$

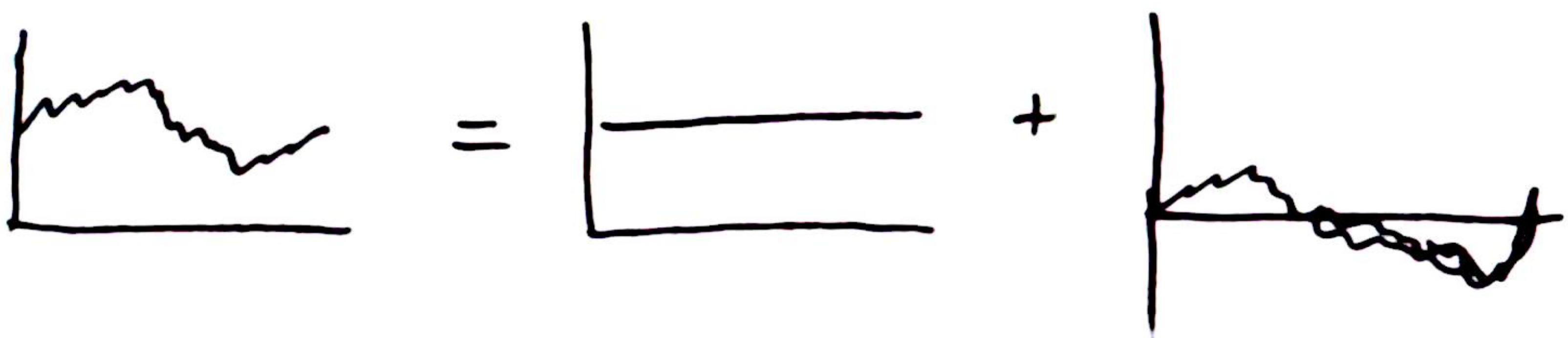
$= |V|$ kertaa V:n derivaatta V:n suuntaan.

Reynoldsin hajotelma

$$f(t) = \bar{f} + f'(t)$$

aikakeskiarvo

hetkellinen poikkeama keskiarvosta



$$2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \;=\; 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \;+\; -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1$$

Diskreetin muuttujan keskiarvo:

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad f_i' = f_i - \bar{f}$$

Jatkuvan:

$$f(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt \qquad f'(t) = f(t) - \bar{f}$$

Reynoldsin sääntöjä

$$\boxed{\overline{\overline{f}} = \overline{f}}$$

$$\overline{\overline{2424}} = \overline{3} = 3$$

$$\boxed{\overline{f'} = \overline{f - \overline{f}} = 0}$$

$$\overline{-1 + 1 - 1 + 1} = 0$$

tai: $\overline{2\,4\,2\,4 - 3} = \overline{2424} - 3 = 3 - 3 = 0$

$$\boxed{\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}}$$

$$\boxed{\overline{c \cdot f} = c\,\overline{f}}$$

$$\overline{5 \cdot 2424} = \overline{10\,20\,10\,20} = 15$$

$$\parallel$$

$$5 \cdot \overline{2424} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\boxed{\overline{f \cdot g'} = 0}$$ koska $\overline{f}$ = vakio

Ja ne tärkeimmät:

$$\boxed{\overline{f'g'} \neq 0 \text{ , yleensä}}$$

$f = 2\ 4\ 2\ 4$ $\quad f' = -1\ +1\ -1\ +1$

$g = 0\ 1\ 3\ 4$ $\quad g' = -2\ -1\ +1\ +2$

$f'g' = 2\ -1\ -1\ 2$

$$\overline{f'g'} = \overline{2\ -1\ -1\ 2} = 1/2 \neq 0$$

$f(x,t)$

$$\boxed{\overline{\frac{d}{dx} f} = \frac{d}{dx} \overline{f}}$$, koska

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{dx} f(x,t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x,t)\,dt\right)$$

Joten myös:

$$\overline{\nabla f} = \nabla \overline{f}$$

$$\overline{\nabla f'} = \nabla \overline{f'} = \nabla 0 = 0$$

$$\overline{\nabla \cdot f} = \nabla \cdot \overline{f}$$

$$\overline{\nabla \cdot f'} = 0$$

jos f vektori

$$\overline{f g} = \overline{(\bar{f} + f')(\bar{g} + g')}$$

$$= \overline{\bar{f}\bar{g} + f'\bar{g} + \bar{f}g' + f'g'}$$

$$= \overline{\bar{f}\bar{g}} + \overline{f'\bar{g}} + \overline{\bar{f}g'} + \overline{f'g'}$$

$$= \bar{f}\bar{g} + 0 + 0 + \overline{f'g'}$$

$$= \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$$

Koska $\overline{f'g'} \neq 0$ (yleensä) niin myös

$$\overline{f'f'} \neq 0 \quad \text{(yleensä)}.$$

$\overline{f'f'}$ f:n varianssi

$\overline{f'g'}$ f:n ja g:n kovarianssi

NS (ilman viskositeettitermiä)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\nabla p}_{\text{merkitään "pakot" yleisesti } F}$$

u-komponentille:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = F_u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = F_u \qquad \text{(sama)}$$

Sama mille tahansa skalaarisuureelle s:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + V \cdot \nabla s = F_u$$

Tehdään Reynoldsin hajotelma, eli

$$s = \bar{s} + s'$$

$$V = \bar{V} + V' \longrightarrow \begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{S} + S') = \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \frac{\partial S'}{\partial t}$$

$$V \cdot \nabla S = (\bar{V} + V') \cdot \nabla(\bar{S} + S')$$

$$= \bar{V} \cdot \nabla(\bar{S} + S') + V' \cdot \nabla(\bar{S} + S')$$

$$= \bar{V} \cdot \nabla \bar{S} + \bar{V} \cdot \nabla S' + V' \cdot \nabla \bar{S} + V' \cdot \nabla S'$$

$$F = \bar{F} + F'$$

$$\overline{\bigcirc} = 0$$

Jäljelle jää:

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{s} = - \underbrace{\overline{V' \cdot \nabla s'}} + F$$

$$\nabla \cdot (s'V') = s' \underbrace{\nabla \cdot V'} + \underbrace{V' \cdot \nabla s'}$$ (tulon derivaatta)

NS:n Boussinesq-approksimaatiossa
(kokoonpuristumaton)

jatkuvuusyhtälö:

$$\underbrace{\nabla \cdot V = 0}$$

voidaan siis kirjoittaa: $\nabla \cdot \overline{s'V'}$

Hetkellinen: $\frac{\partial s}{\partial t} + V \cdot \nabla s = F$

Keskiarvoistettu: $\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{s} = -\nabla \cdot \overline{s'V'} + F$

Mukaan ilmestyy uusi termi: kovarianssi

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{s}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}\overline{s'u'} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{s'v'} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{s'w'} + F$$

(sama auki kirjoitettuna)

suureen s vuot (turbulenttinen kuljetus):

$\overline{s'u'}$ $\overline{s'v'}$ $\overline{s'w'}$ ← pystyvuo

lämmön vertikaalivuo: $\overline{\theta' w'}$

kosteuden: $\overline{q' w'}$

Mittauksia: mastot

EC = Eddy kovarianssi menetelmä

Ainakin 10 mittausta sekunnissa

Liikemäärän (turbulenttiset) vuot:

$$\overline{u'u'},\ \overline{u'v'},\ \overline{u'w'},\ \overline{v'v'},\ \overline{v'w'},\ \overline{w'w'}$$

$$\tau = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} =$$ Reynoldsin stressitensori (symmetrinen)

(Jos et osaa tensorilaskentaa, älä välitä)

Reynolds-stressi esim. 0,05 m^2/s^2

Viskoosi stressi esim. 0.00001 m^2/s^2

Oikeastaan $\overline{u'w'}$ on nopeuden vuo.

$\rho\,\overline{u'w'}$ olisi liikemäärän vuo.

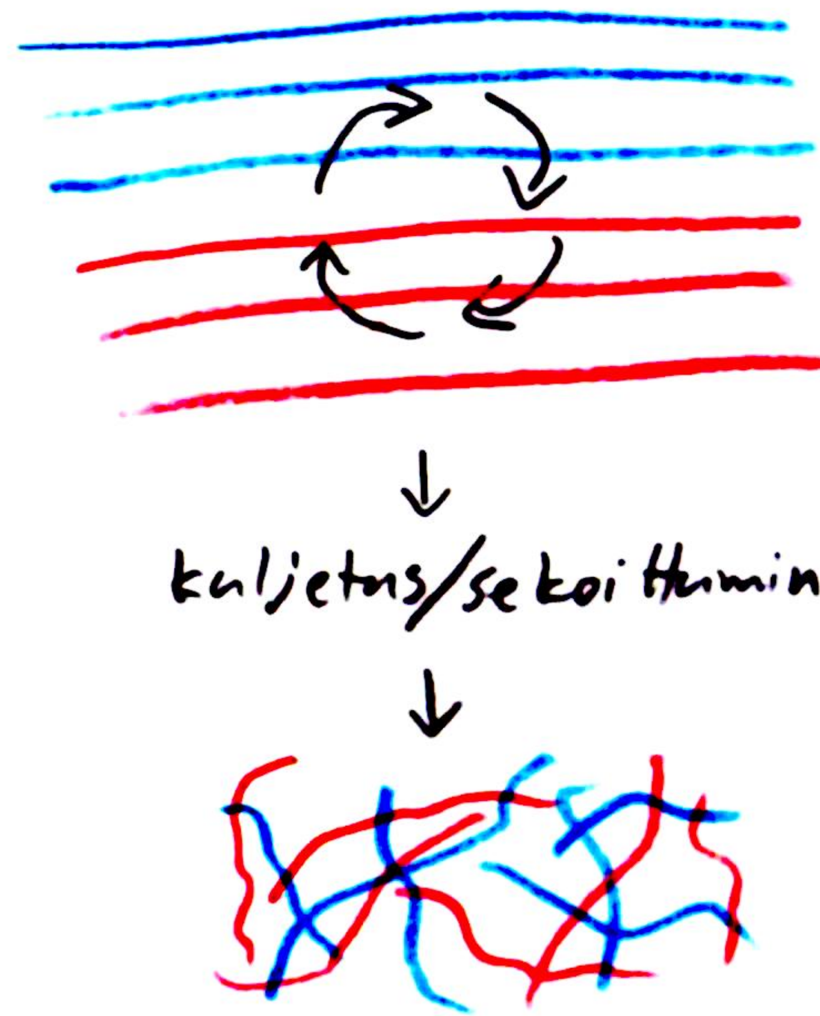
Yleensä kuitenkin puhutaan (mitä sattuu)

Mitä termi $\overline{\theta' w'}$ (esim.) tarkoittaa?

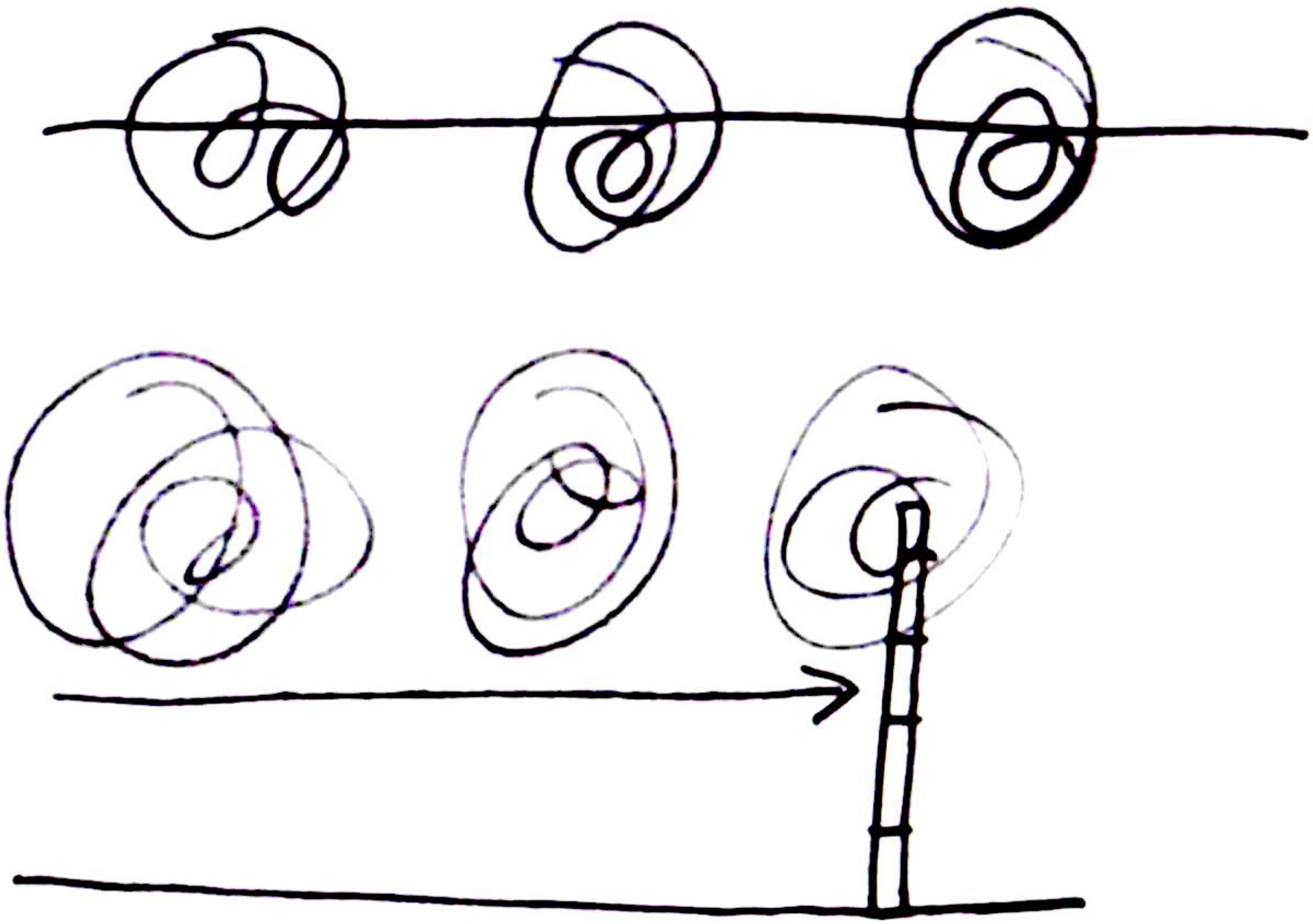
Kun w' on hetkellisesti ylöspäin, ilma on lämmintä

Kun w' on hetkellisesti alaspäin, ilma on kylmää

($\overline{w}$ yleensä 0)



Taylorin hypoteesi



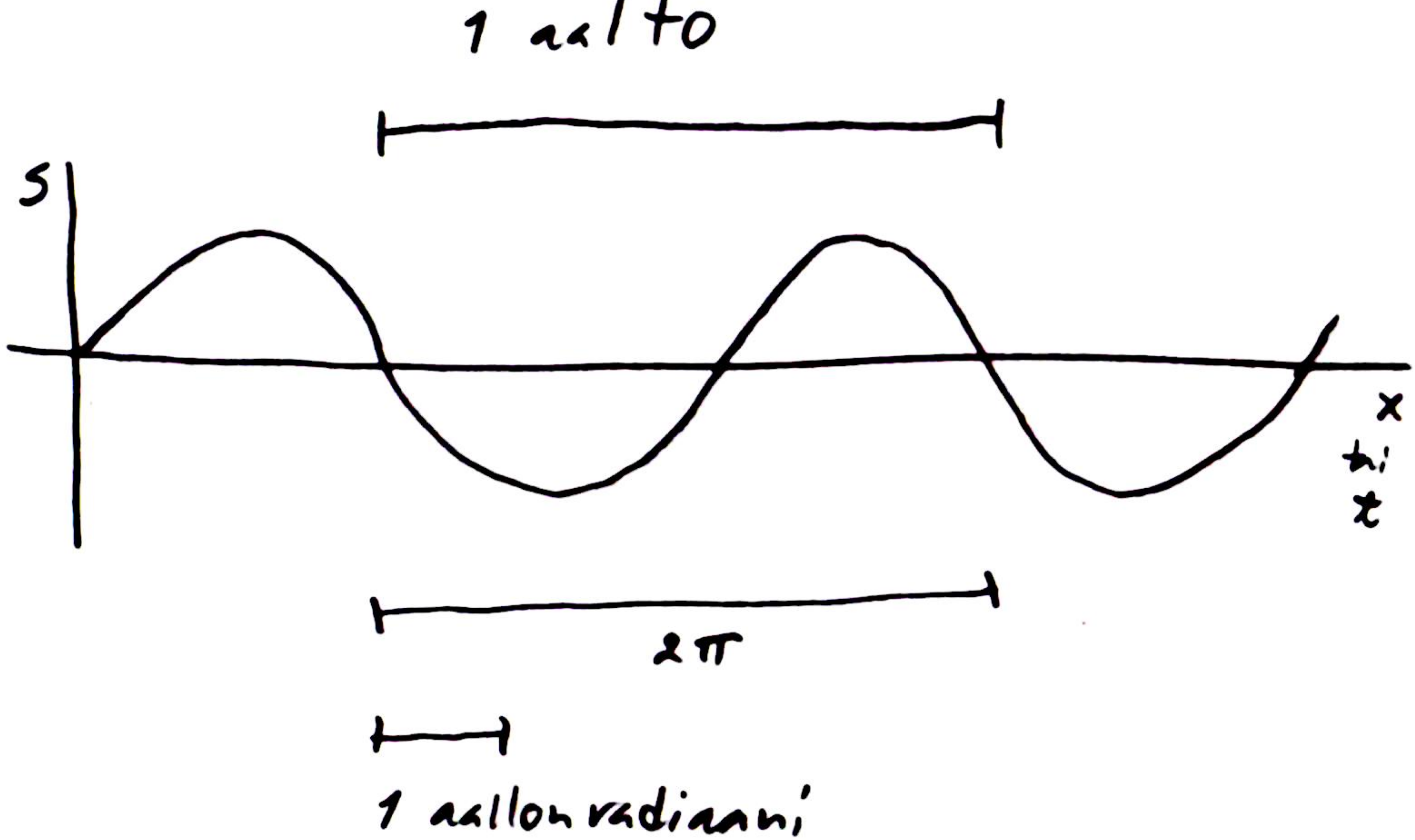
(Aaltoluvusta)

Yleensä aaltoluku $k = \frac{1}{\lambda}$ (λ = aallonpituus)

Eli montako aaltoa metrillä.

Joskus kuitenkin ajatellaan että yhden aallon pituus on 2π eikä 1, saadaan ns. kulma-aaltoluku $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Eli montako (kokonaisen) aallon radiaanin mittaista osaa metrillä.


1 aalto
s
x
tai
t
2π
1 aallon radiaani

Aletaan rakentamaan pystysuuntaista rajakerrosmallia. Aikaisemmin saatiin:

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \underline{\bar{u}\frac{\partial \bar{s}}{\partial x}} + \underline{\bar{v}\frac{\partial \bar{s}}{\partial y}} + \underline{\bar{w}\frac{\partial \bar{s}}{\partial z}} = F \underline{- \frac{\partial}{\partial x}\overline{s'u'}} \underline{- \frac{\partial}{\partial y}\overline{s'v'}} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{s'w'}$$

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ -termit $= 0$

$\bar{w} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = F - \frac{\partial}{\partial z}\overline{s'w'}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = F - \frac{\partial}{\partial z}\overline{s'w'}}$$

u: $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

v: $$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'}$$

θ: $$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \bar{S}_\theta - \frac{\partial}{\partial z}\overline{\theta'w'}$$

q: $$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \bar{S}_q - \frac{\partial}{\partial z}\overline{q'w'}$$

Jos lisäksi $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + f\overline{v} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - f\overline{u} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'}$$

Rajakerroksen yläpuolella turbulenssi = 0 :

$$f v_g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$$

$$f u_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$$

$$0 = f(\overline{v} - v_g) - \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$0 = -f(\overline{u} - u_g) - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'}$$