Stabiliteetti

Missä määrin nosteesta (lämpötilan pystyprofiilista) johtuvat ilmiöt vaikuttavat turbulenssiin?

- synnyttävät: epästabiili
- eivät vaikuta: neutraali
- vaimentavat: stabiili

vanha kunnon TKE

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{k_t w'} + \frac{\overline{p'w'}}{\overline{\rho}}\right] \underbrace{- \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}}_{S} + \underbrace{\frac{g}{\overline{\theta}}\overline{w'\theta'}}_{B} - \varepsilon$$

vuo-Richardsonin luku Ri_f

$$\frac{B}{S} = \frac{\frac{g}{\theta}\overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{v'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}}$$

(oikeastaan tämä on $\frac{B}{-S}$)

vuo-Richardsonin luku Ri_f tai R_f

$$\frac{\frac{g}{\theta}\,\overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}$$

jos $\bar{u}$ valitaan keskituulen suuntaiseksi

$$\frac{\frac{g}{\theta}\,\overline{w'\theta'}}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\overline{V_i'V_j'}\,\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j}}$$

jos ei oleteta kummempia tuulen suunnasta

$V = (V_1, V_2, V_3)$

$$Ri_f = \frac{\frac{g}{\theta}\,\overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = \frac{B}{-S}$$

Mekaaninen turbulenssin tuotto $-S > 0$

epästabiili/labiili : $B > 0$ $Ri_f < 0$

neutraali : $B = 0$ $Ri_f = 0$

Stabiili : $B < 0$ $Ri_f > 0$

Stabiilisuusindikaattori

gradientti-Richardsonin luku Ri_g

Turbulenttiset vuot hankalia mitata

$$\overline{w'\theta'} = -K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

ja vielä $K_h = K_m$

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$\frac{\frac{g}{\theta}\,\overline{w'\theta'}}{u'w'\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = \frac{-K\,\frac{g}{\theta}\,\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{-K\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = \frac{\frac{g}{\theta}\,\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} = Ri_g$$

bulk-Richardsonin luku Ri_b tai R_B

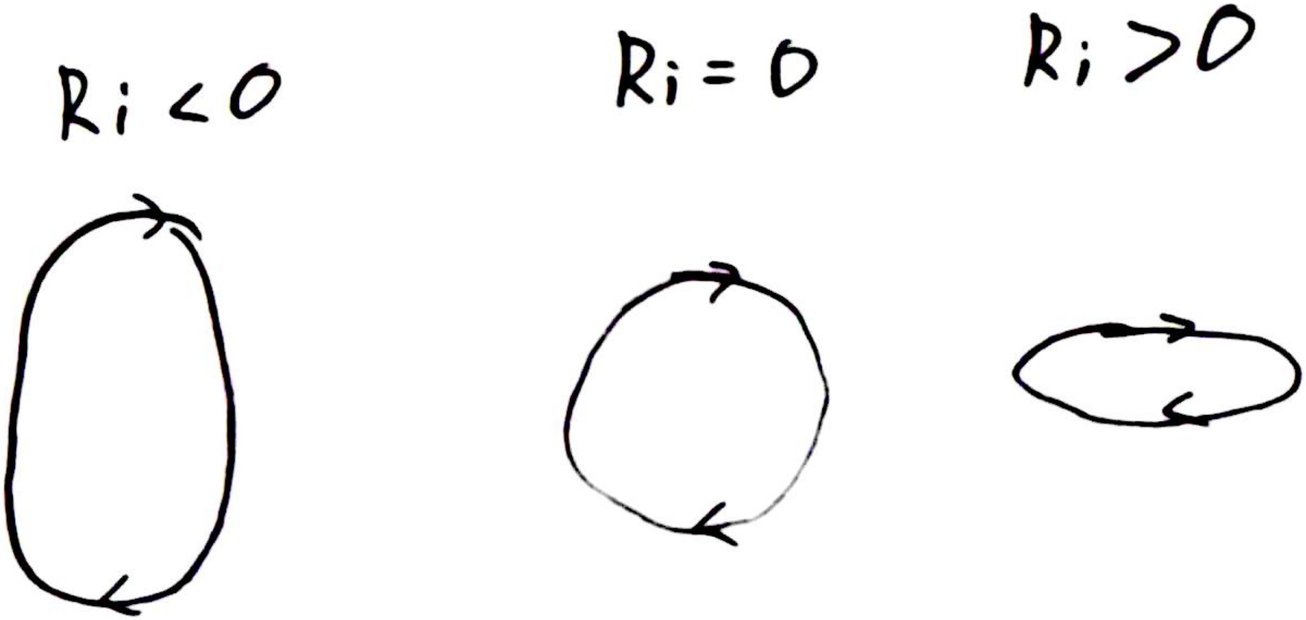
Jos ei jakseta mitata edes $\bar{\theta}$:n ja $\bar{u}$:n pystyprofiileja, riittää mitata edes 2 korkeudelta.

Tällöin $\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} \approx \dfrac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta z}$ $\quad \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z} \approx \dfrac{\Delta\bar{u}}{\Delta z}$

$$\frac{\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}}\Delta\bar{\theta}}{\frac{(\Delta\bar{u})^2}{\Delta z}} = \frac{g}{\frac{1}{2}(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2)}\frac{\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_1}{(\bar{u}_2-\bar{u}_1)^2}(z_2-z_1)$$

$$z_2 > z_1$$

Ri myös turbulenssin anisotrooppisuuden mitta



Pruju sanoo myös että

$$Ri_g = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2}$$

missä N on Brunt-Väisälä-taajuus,

eli:

$$N = \sqrt{\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}$$

Mitä tämä tarkoittaa?

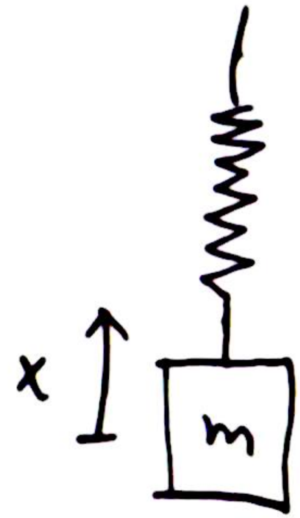
Harmoninen oskillaattori:

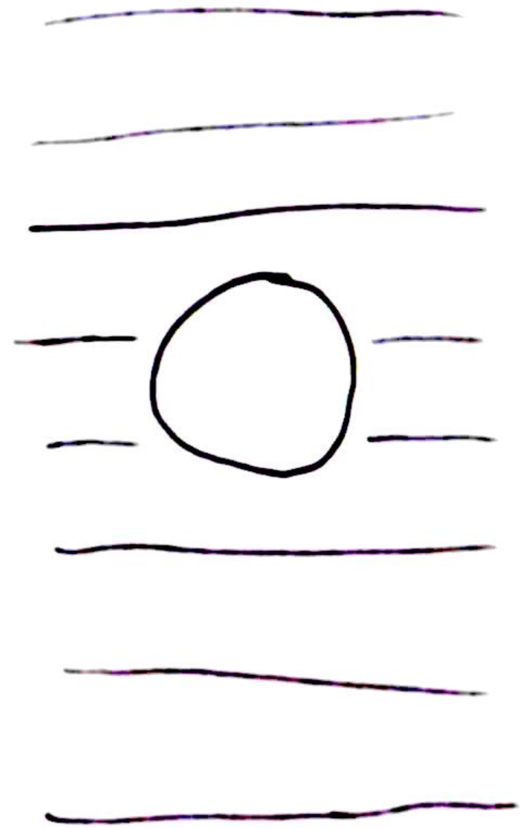
Jousivoima

$$F = -kx$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$N = \sqrt{\frac{g}{\overline{\theta}}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}}$$

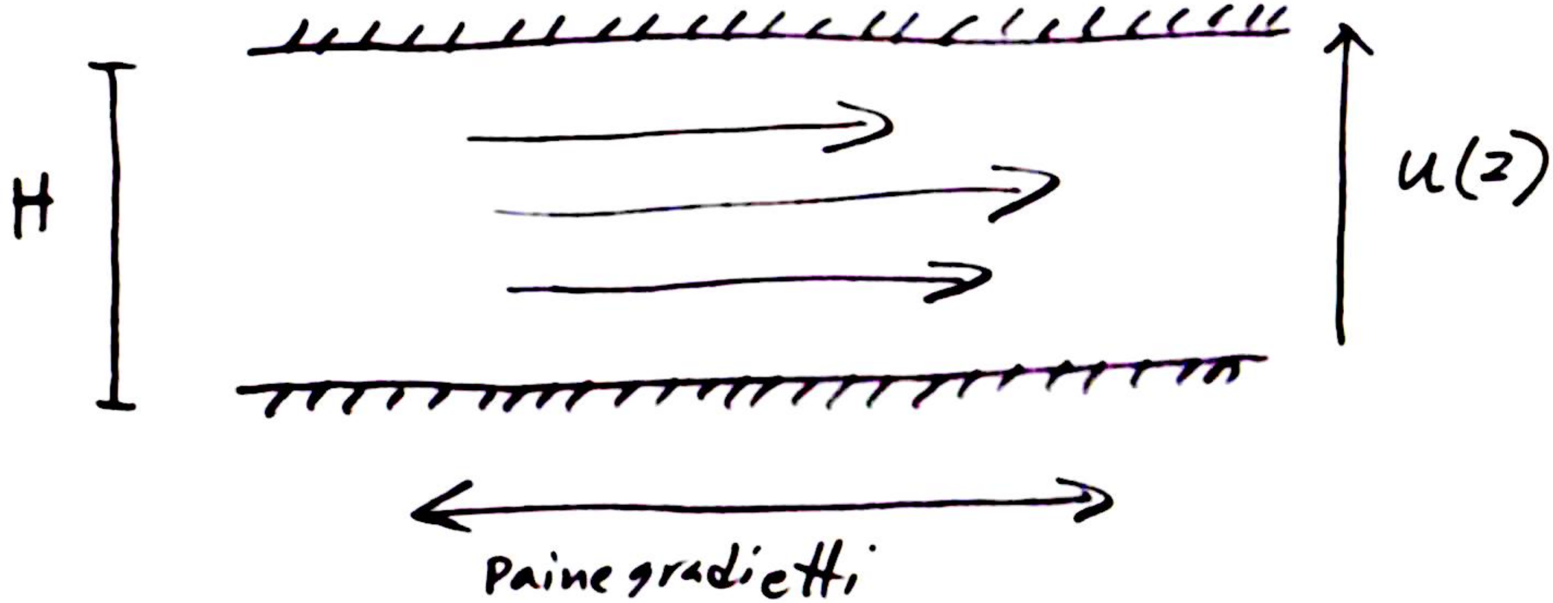




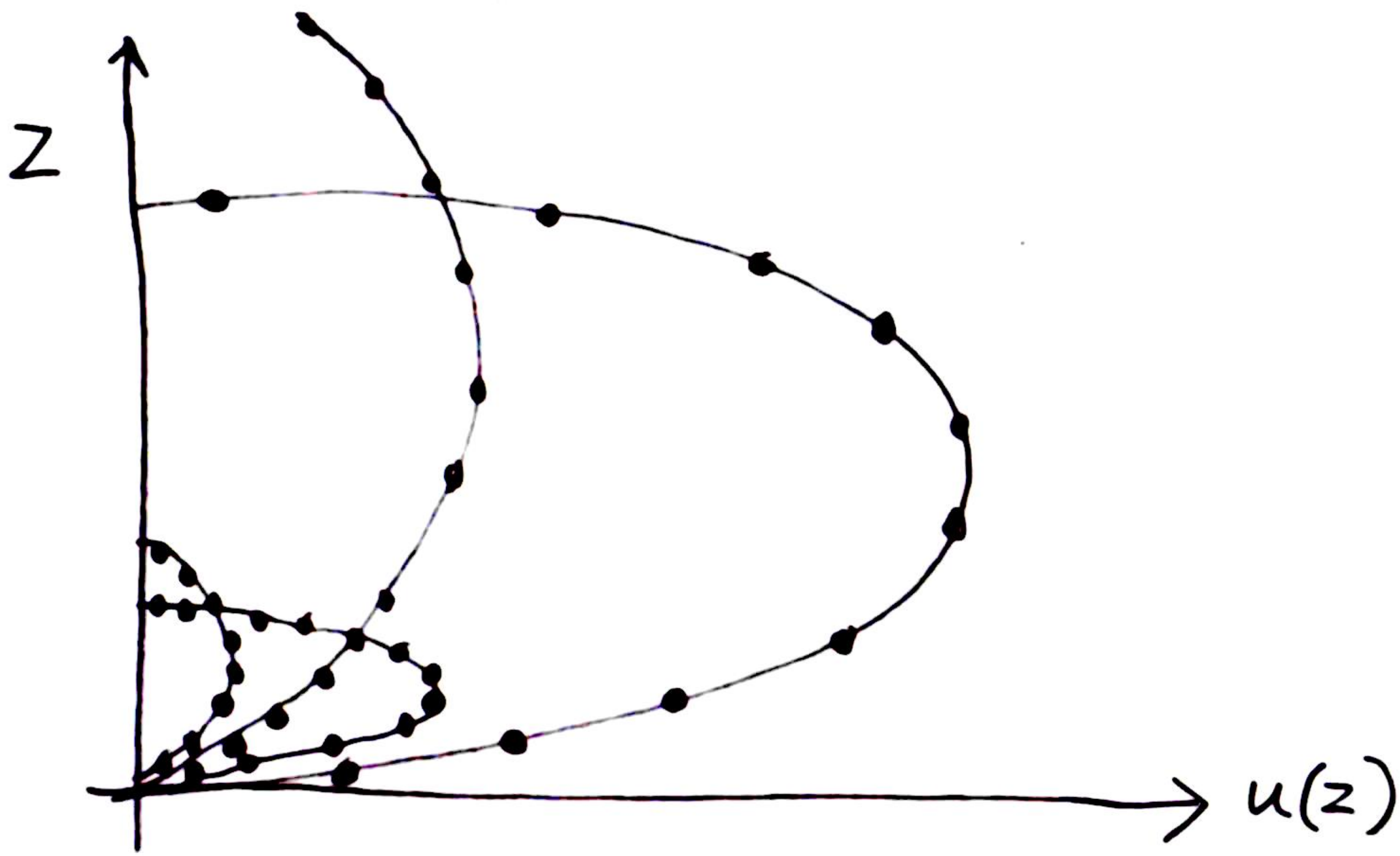
ilmapaketti

Similariteetti / Dimensioanalyysiä

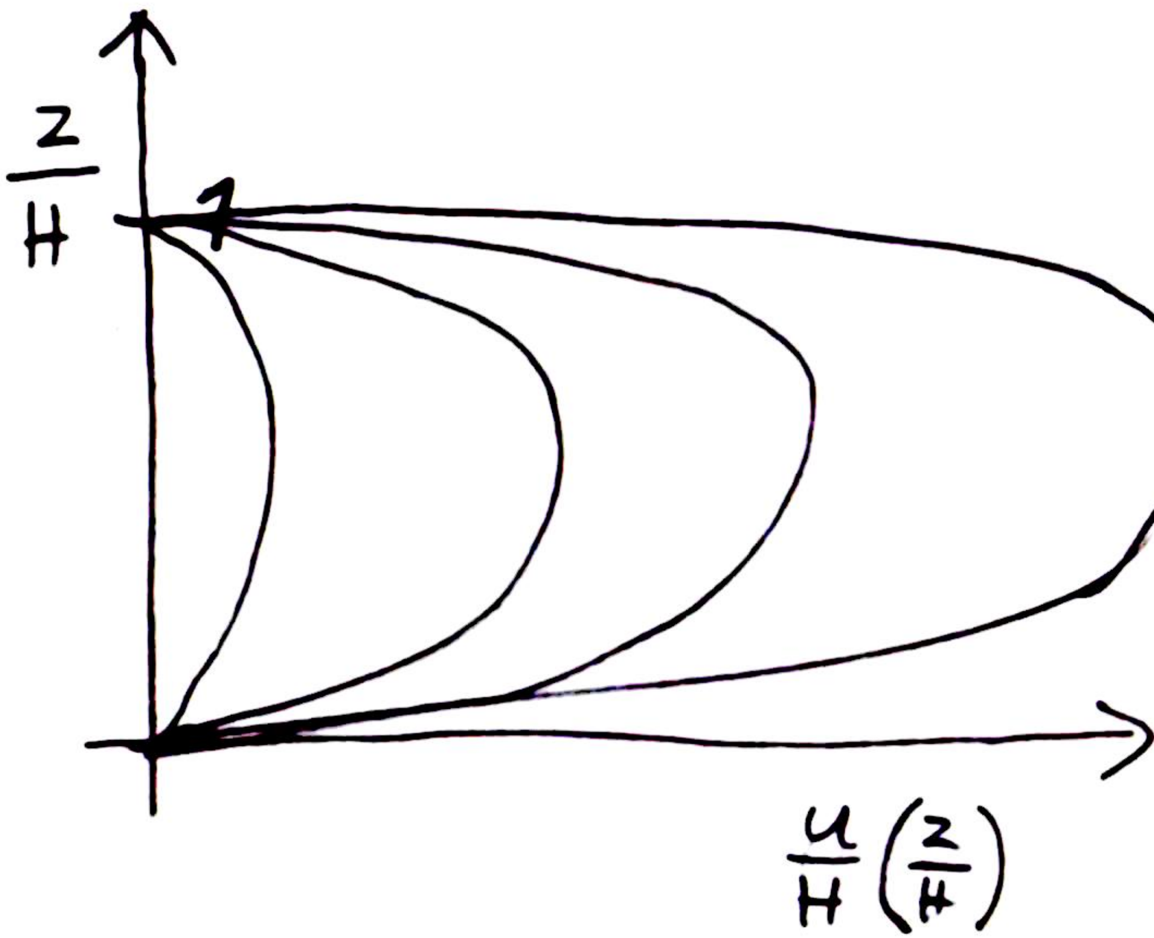
Esimerkki (laskarit): virtaus 2 levyn välissä (tässä ei liikkuvia levyjä).



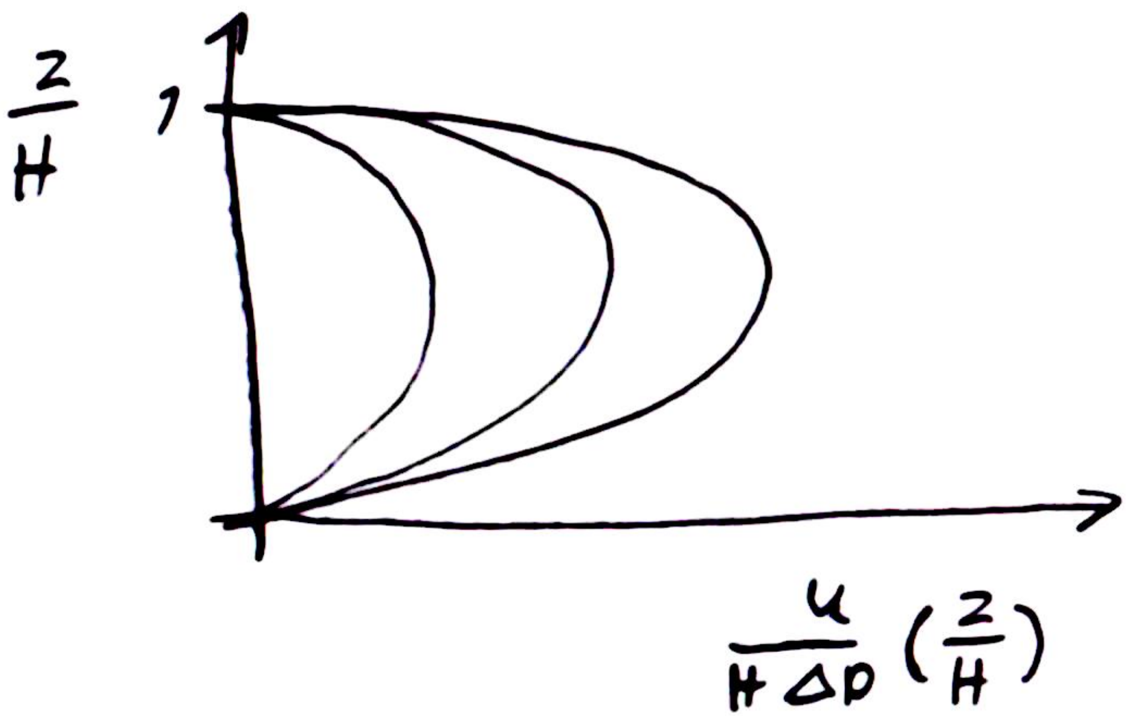
Mitataan paljon erilaisia tapauksia



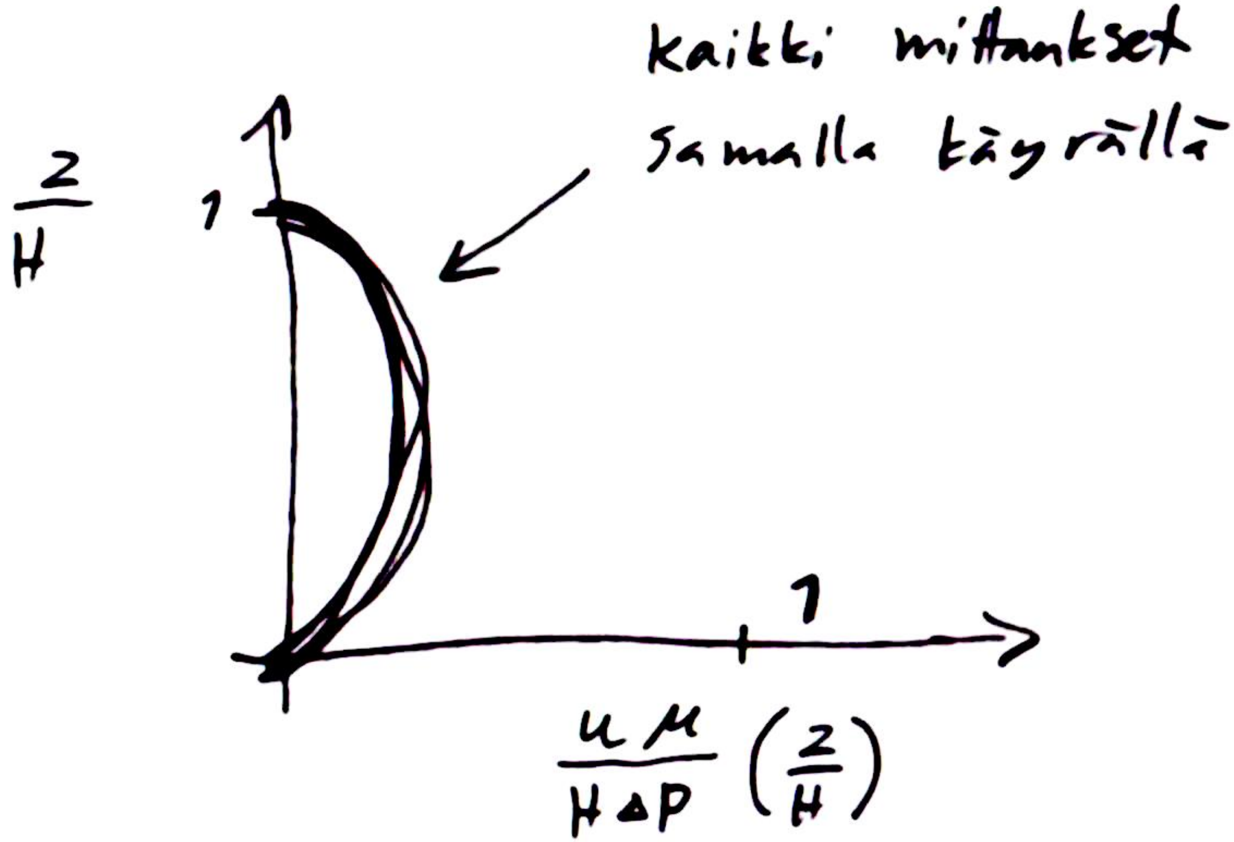
Idea: skaalataan z H:lla



skaalataan u paine-erolla Δp



Skaalataan (kerrotaan) u viskositeetilla μ



Miksi näin?

laskareista tehtävän vastaus:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} z^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} H z = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(z^2 - Hz\right)$$

$z' = \frac{z}{H} \quad z = Hz'$

$$u' = \frac{\mu}{H \Delta P} u$$

$$u(z') = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(H^2 z'^2 - H^2 z'\right)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P}{H}\right)$$

$$u'(z') = \frac{1}{2}\left(z'^2 - z'\right)$$

(oikeastaan $\Delta P < 0$)

Idea oli siirtyä dimensiottomiin suureisiin

$u(z) \qquad [u] = \frac{m}{s} \qquad [z] = m$

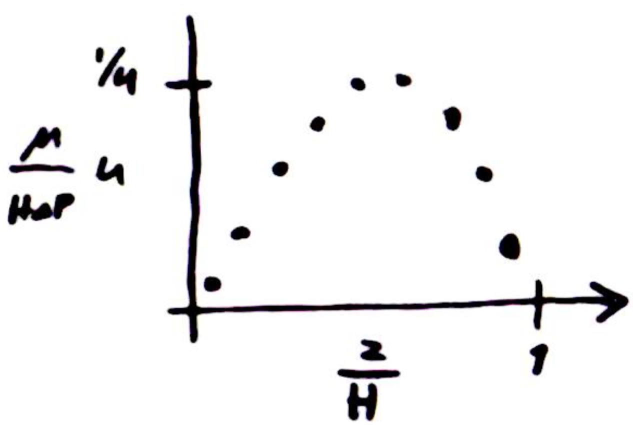
Tilannetta kuvaavat suureet:

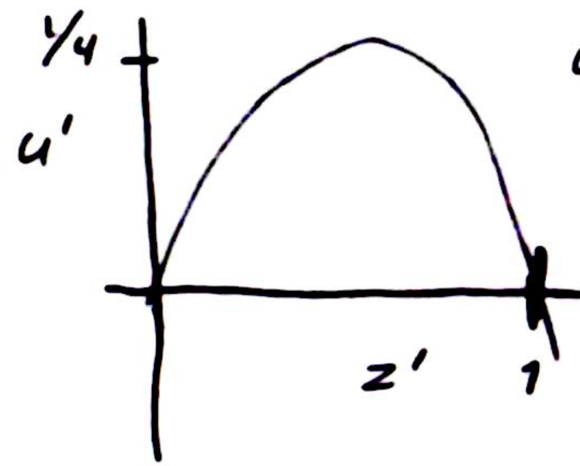
$H, \mu, \Delta P$

$[H] = m \qquad [\mu] = Pa\ s \qquad [\Delta P] = Pa$

$$\left[\frac{z}{H}\right] = 1 \qquad \left[\frac{\mu}{H \Delta P} u\right] = \frac{Pa\ s}{m\ Pa} \frac{m}{s} = 1$$

Tässä tapauksessa tunnettiin ilmiötä kuvaava laki (NS yhtälö) ja jopa osattiin ratkaista se. Mutta vaikka ei tunnettaisi, jos keksitään hyvä dimensioton skaalaus, voidaan muutaman kokeen avulla arvata oikea vastaus





$$u' = \frac{1}{2}(z' - z'^2)$$

<u>Vielä parempi:</u> jos kohteena ei ole funktio, kuten $u(z)$, vaan skalaari, kuten virtauksen keskinopeus (tai pelkän kokonaisvirtaama), se voitaisiin ratkaista, vakiokerrointa vaille.

$$\bar{u} \sim \frac{H \Delta P}{\mu}$$

Putken virtaama kg/s

$[D] = m \quad [\Delta P] = Pa = \frac{kg}{ms^2} \quad [\mu] = Pa\,s = \frac{kg}{ms}$

tarvitaan lisäksi $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

Tarpeeksi kun miettii:

$$\frac{[\Delta P]\,[\rho]\,[D]^3}{[\mu]} = \frac{Pa\ kg/m^3\ m^3}{Pa\ s} = \frac{kg}{s}$$

eli virtaama $\sim \frac{\Delta P\,\rho\,D^3}{\mu}$

Ajatellaan virtauksen nopeusprofiilia pinnan lähellä, $u(z)$

Jos ajatellaan vain yksi pinta, ei haluta ajatella mitään painegradienttia tai keskinopeutta. Halutaan kuitenkin skaalata u ja z jotenkin.

Erittäin lähellä sileää pintaa olennaisia suureita voisivat olla

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

$$[\nu] = \frac{m^2}{s}$$

$$[\tau] = \frac{kg}{m s^2} \qquad \tau = \tau_{13} = \text{liikemäärän pystyvuo}$$

$$\left[\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\right] = \sqrt{\frac{\frac{kg}{m s^2}}{\frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s} = u_*$$

$$\left[\frac{\nu}{u_*}\right] = \frac{m^2/s}{m/s} = m$$

Saadaan:

$$u' = \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}} = \frac{u}{u_*}$$

$$z' = \frac{z}{\nu / u_*}$$

u_* = Kitkanopeus

z' = korkeus suhteutettuna molekulaarisen viskositeetin mittakaavaan

$$u' = f(z')$$

$$\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{u_*}{\nu} z\right)$$

Muuta kautta (mittaukset, laskarit)

tiedetään että pinnan lähellä

f on lineaarinen.

Entäpä turbulenttinen virtaus karkean pinnan lähellä?

Nyt viskositeetti ν ei ole olennainen.

Toisaalta pinnan karkeus pitää kuvata jollain suureella.

Jos τ onkin Reynoldsin stressi,

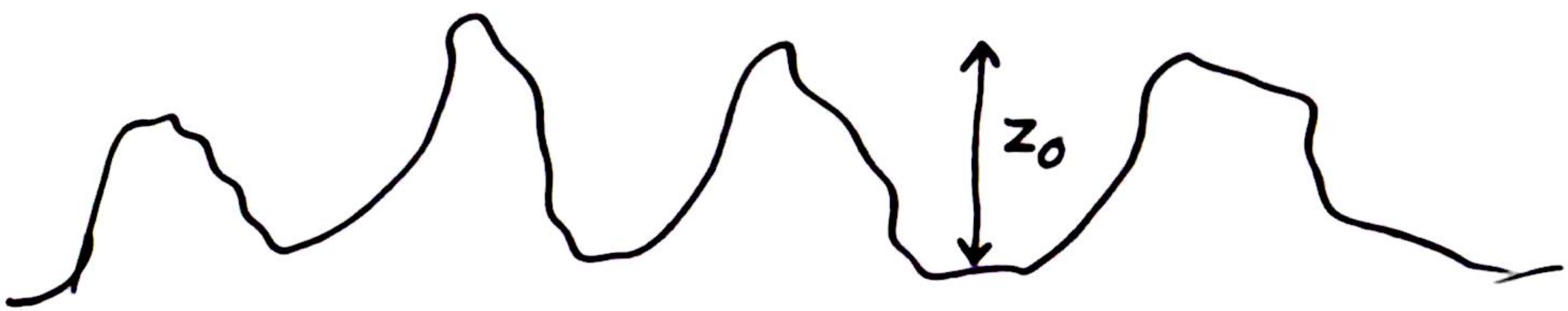
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho\,\overline{u'w'}}{\rho}} = \sqrt{\overline{u'w'}}$$

(tai no, $\sqrt{-\overline{u'w'}}$ koska $\overline{u'w'}$ on alaspäin)

niin u_* kelpaa edelleen skaalaukseen

Jos pinnan rosoisuutta mitataan pituuden yksiköillä, saadaan tästä suoraan relevantti pituusskaala

$$z' = \frac{z}{z_0}$$



Siis, $\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{z}{z_0}\right)$

Mittausten mukaan näyttää siltä että

f on logaritmi

Vaikka haluttiin profiili $u(z)$,
voidaan myös kikkailla ja olla
kiinnostuneita "skalaarista"

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \frac{m/s}{m} = \frac{1}{s}$$

$$\left[\frac{u_*}{z}\right] = \frac{m/s}{m} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{u_*}{z}$$

Sattuneesta syystä merkitään verrannollisuus-kerrointa $\frac{1}{k}$:lla,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k}\,\frac{u_*}{z}$$

$$\int_0^z \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = \frac{u_*}{k}\int_0^z \frac{1}{z}\,dz = \frac{u_*}{k}\ln z + C$$

valitaan $C = -\ln z_0$,

$$u(z) = \frac{u_*}{k}\ln\frac{z}{z_0}$$

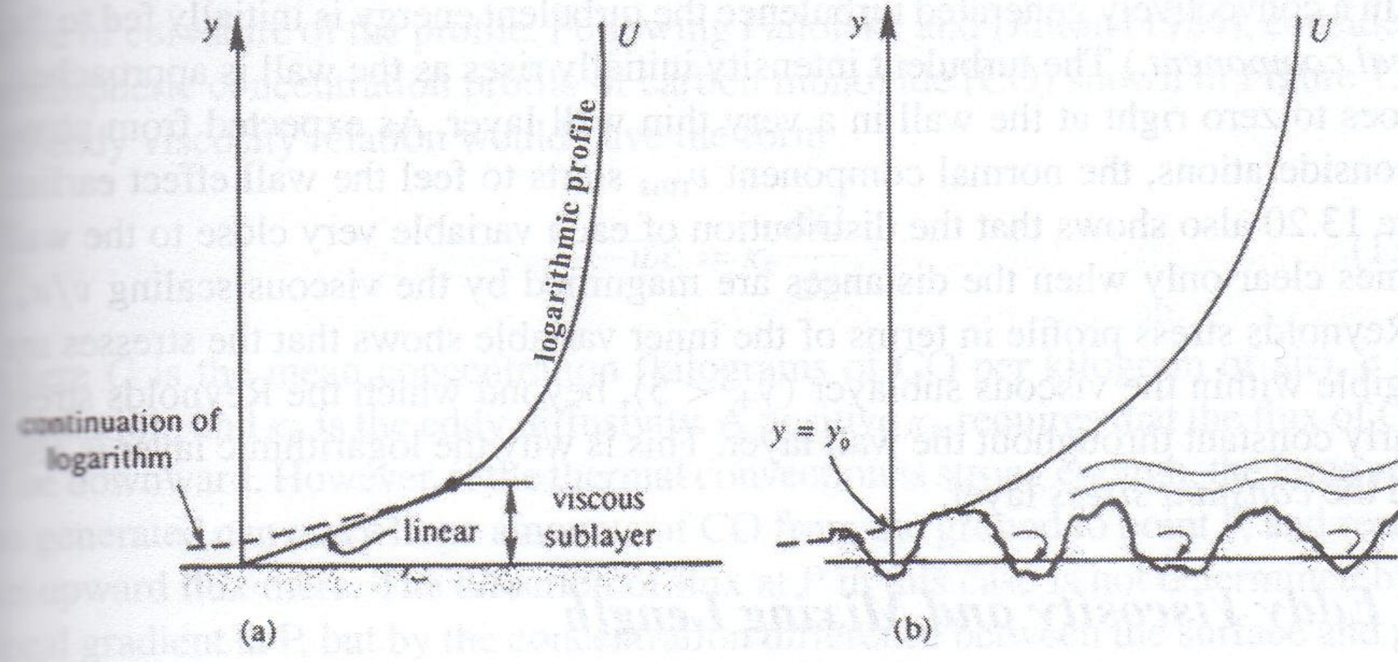


Figure 13.19 Logarithmic velocity distributions near smooth and rough surfaces: (a) smooth wall; and (b) rough wall.

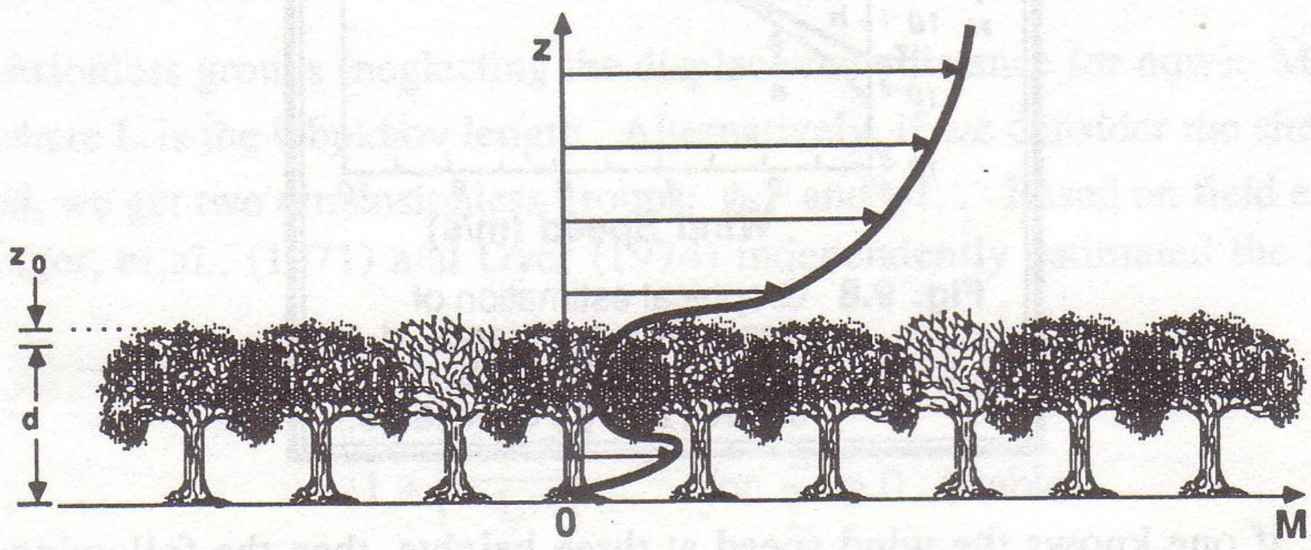
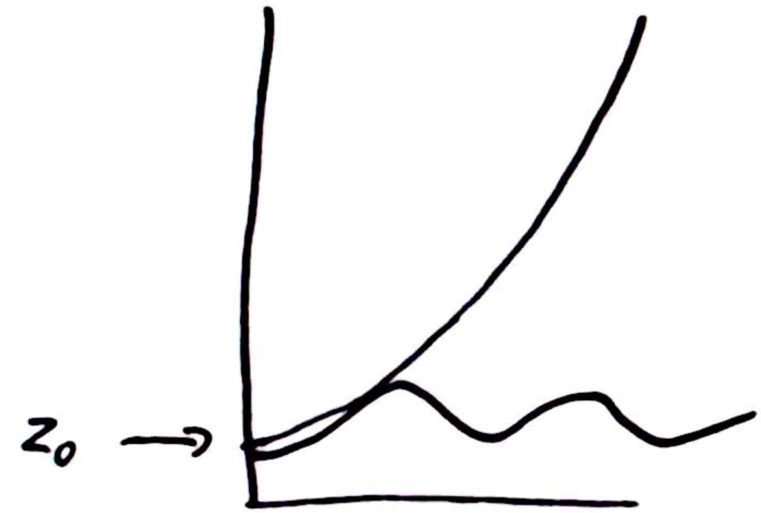
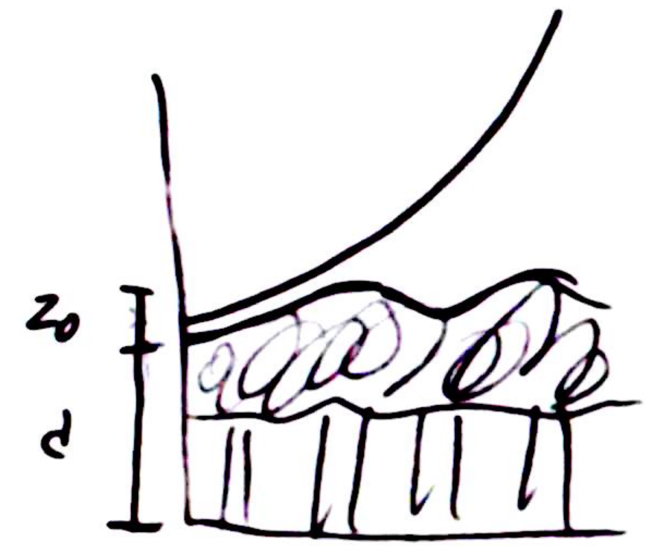


Fig. 9.7 Flow over forest canopy showing wind speed, M, as a function of height, z. The thick canopy layer acts like a surface displaced a distance, d, above the true surface. z_0 = roughness length.

$$u(z) = \frac{u}{u_*} \ln \frac{z}{z_0}$$



$$u(z) = \frac{u}{u_*} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right)$$



z_0 = roughness length

d = displacement height

Nämä siksi että tuulen ja ihmisten mielestä maan pinta on eri korkeudella.