Fourier-analyysistä kevyesti

Joseph Fourier (1768 – 1830), Ranska

Keksi villin ajatuksen että mikä tahansa funktio voidaan esittää sinifunktioiden/trigonometristen funktioiden summana.

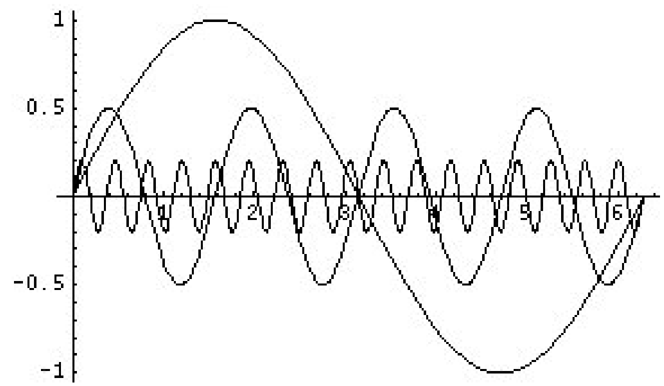
Keksi myös kasvihuoneilmiön 1824

In[38]:= `f1[x_] := Sin[x]`

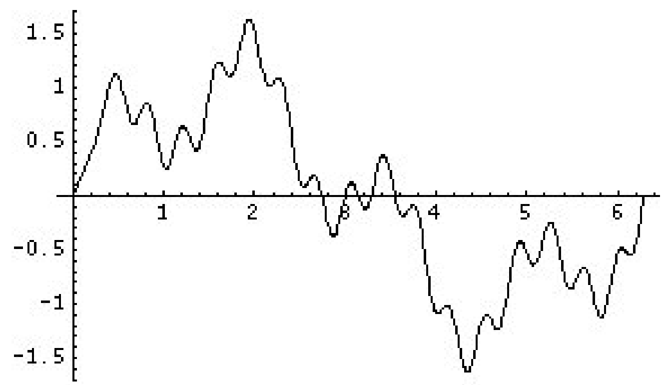
$$f2[x\_] := \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}[4\,x]$$

$$f3[x\_] := \frac{1}{5}\,\mathrm{Sin}[17\,x]$$

In[41]:= `Plot[{f1[x], f2[x], f3[x]}, {x, 0, 2 Pi}];`



In[42]:= `Plot[f1[x] + f2[x] + f3[x], {x, 0, 2 Pi}];`



Perusajatus:

valitaan perusjoukko, kuten

$\underset{f_1}{\sin(x)}$, $\underset{f_2}{\sin(2x)}$, $\underset{f_3}{\sin(3x)}$, ...

ja etsitään yhdistelmä

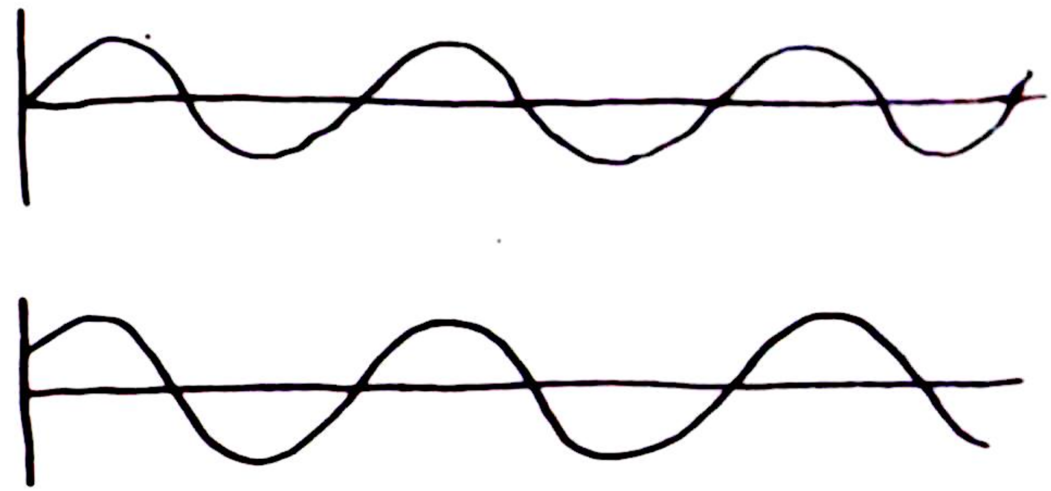
$$f = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + \ldots$$

2 (tai 3) mattaa ...

Mutta ?

$\sin(nx)$

$\sin(nx+s)$



Parhaiten funktioon sopiva aalto ei välttämättä ole 0-vaiheessa.

Perusjoukko v2.0

$$f = k_0 + k_1 \sin(x + s_1) + k_2 \sin(2x + s_2) + \dots$$

vakio = $\overline{f}$

Eli f:n voi kuvata kertoimilla

$k_0, k_1, k_2, k_3, \dots$

$s_1, s_2, s_3, \dots$

Lisäksi osoittautuu että varianssilla on erittäin näppärä ominaisuus:

$$f = k_0 + k_1 \sin(x + s_1) + k_2(2x + s_2) + k_3 \sin(3x + s_3) + \dots$$

$$\overline{f'^2} = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \dots)$$

(Huom. tämä ei ole ollenkaan päivänselvää)

Koska $\overline{\sin(nx)\sin(nx)} = \frac{1}{2}$

ja $\overline{\sin(nx)\sin(mx)} = 0$ kun $n \neq m$

Mutta 2

Kivitaulella oli työlästä etsi kertoimia

k ja s muodolle $k \sin(nx+s)$.

$$\sin(nx+s) = \sin(n(x+x_0)) \qquad nx_0 = s$$

$$= \sin(nx + nx_0)$$

$$\left[\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x\right]$$

$$= [\cos nx_0] \sin nx + [\sin nx_0] \cos nx$$

Perusjoukko v3.0

$$f = k_1 + \begin{matrix} g_1 \sin x \\ h_1 \cos x \end{matrix} + \begin{matrix} g_2 \sin 2x \\ h_2 \cos 2x \end{matrix} + \ldots$$

lisäksi pätee, vs. aikaisempi muoto, että

$$k_n^2 = g_n^2 + h_n^2$$

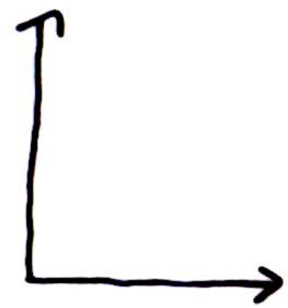
Koska muodosta $[\cos nx_0] \sin nx + [\sin nx_0] \cos nx$

$$[\cos nx_0]^2 + [\sin nx_0]^2 = 1$$

Tässä muodossa, eli sini-cosini-sarjana, Fourier-kertoiminen etsiminen on (laskennallisesti) helppoa, sillä perusjoukko muodostaa (kaikkien mahdollisten aikasarjojen avaruuteen) ortogonaalisen (suorakulmaisen) kannan, ja kertoimet voidaan laskea projisoimalla, eli vektorien (aikasarjojen) sisätuloina.

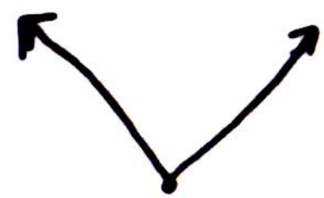
Sama pidemmin selitettynä:

2D-avaruus



kantavektorit

$\hat{e}_1 = (1, 0)$
$\hat{e}_2 = (0, 1)$



kannan kierto 45°,

$\hat{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \hat{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Jos f on 2 pisteen aikasarja,

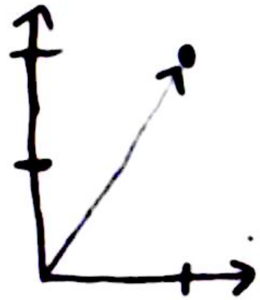
$$f = (x_1, x_2)$$

voidaan f esittää muissakin kuin

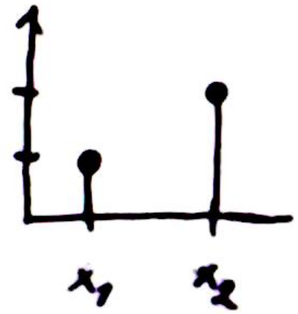
$$\hat{e}_1 = (1, 0)$$
$$\hat{e}_2 = (0, 1)$$

koordinaatistoissa.

$f = (1, 2)$



vektorina



aikasarjana

$$f = (1, 2)$$

$f = 1\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2$ jos $\hat{e}_1 = (1, 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1)$

Jos taas $\hat{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\hat{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$f = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_2$$

samalla lailla n näytteen aikasarja

ajatellaan vektorina n-ulotteisessa

avaruudessa $t = (x_1, x_2, \ldots x_n)$

Ja se voidaan esittää myös toisenlaisten

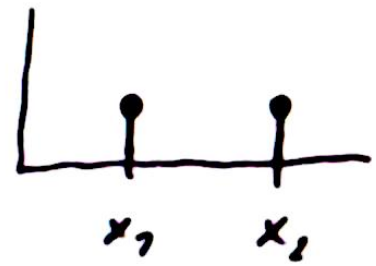
kantavektorien avulla.

Kyseessä on vain moniulotteisen

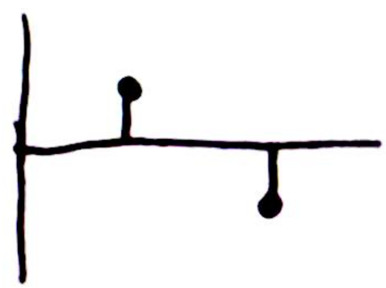
koordinaatiston kierto.

2D - tapauksessa

$\hat{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



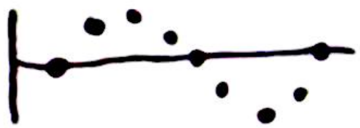
$\hat{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



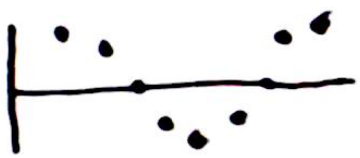
9D-tapaus

1

$\sin x$



$\cos x$



$\sin 2x$

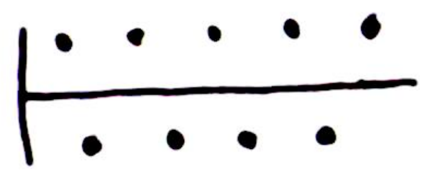
$\cos 2x$

$\sin 3x$

$\cos 3x$

$\sin 4x$

$\cos 4x$



$$f = k_1 \hat{e}_1 + k_2 \hat{e}_2 + k_3 \hat{e}_3 + \ldots$$

Kantavektorien sisätuloille pitäisi pätea

$$\langle \hat{e}_n | \hat{e}_n \rangle = 1$$

$$\langle \hat{e}_n | \hat{e}_m \rangle = 0 \quad , \quad n \neq m$$

Fourier-kertoimet voidaan laskea:

$$k_1 = \langle f | \hat{e}_1 \rangle$$

$$\vdots$$

$$k_n = \langle f | \hat{e}_n \rangle$$

$$\hat{e}_m = (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$$

(tai sitten 0 ... n-1)

$$f = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$$

$$k_m = \langle f \mid \hat{e}_m \rangle = \sum_{l=1}^{n} e_{ml} f_l$$

Käänteismuunnos

$$f = k_1 \hat{e}_1 + k_2 \hat{e}_2 + k_3 \hat{e}_3 + \ldots$$

$$f_l = (k_1 \hat{e}_1)_l + (k_2 \hat{e}_2)_l + (k_3 \hat{e}_3)_l + \ldots$$

$$= k_1 (\hat{e}_1)_l + k_2 (\hat{e}_2)_l + k_3 (\hat{e}_3)_l + \ldots$$

$$f_l = \sum_{i=1}^{n} k_i (\hat{e}_i)_l$$

Mutta 3

sini-cosini-sarjat on hyvä tapa ajatella taajuuksia, mutta käytännössä Fourier-muunnos lasketaan kompleksi-eksponenttien avulla

Eulerin kaava

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Kantavektorijoukko v4.0

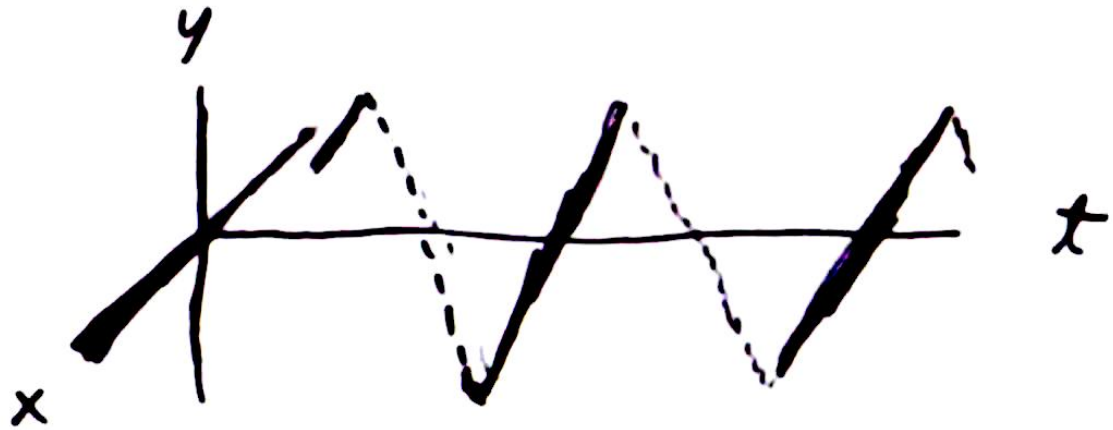
$l = 0, \ldots, n-1$

n näytteen tapaus, eli n-ulotteinen

$$\hat{e}_l(t) = \exp\left(-2\pi i \frac{lt}{n}\right) \leftarrow$$

+ normalisointi!

i:tä ei voi käyttää indeksinä, se on imaginääri-yksikkö



$K = \frac{2\pi}{n}$,

$\hat{e}_0(t) = e^0 = (1, 1, 1, \dots)$

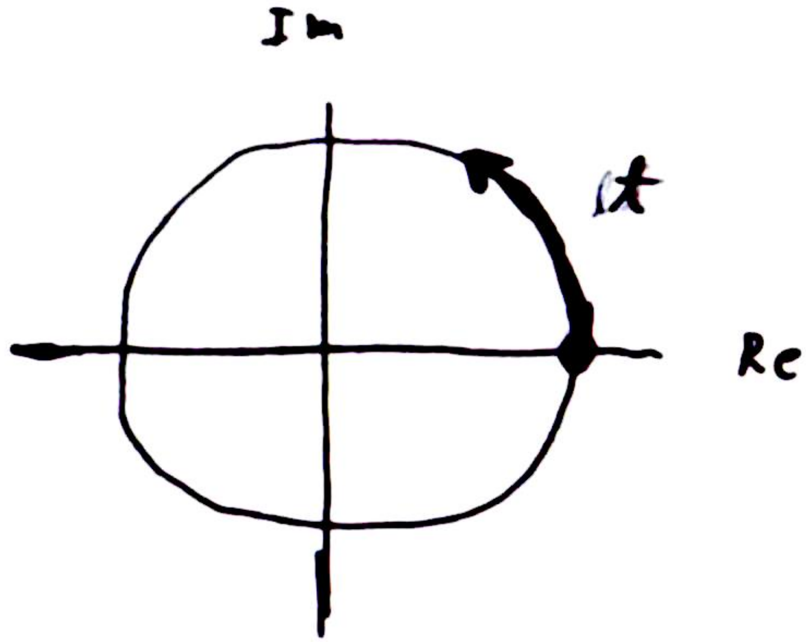
$\hat{e}_1(t) = e^{-iKt}$

$\hat{e}_2(t) = e^{-iK2t}$

$\hat{e}_3(t) = e^{-iK3t}$

jne.

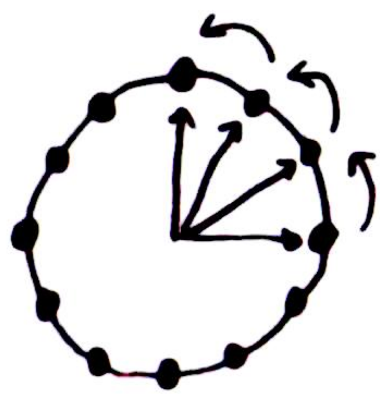
e^{-ist} esitettynä kompleksitasossa yksikköympyrällä "kellotauluna



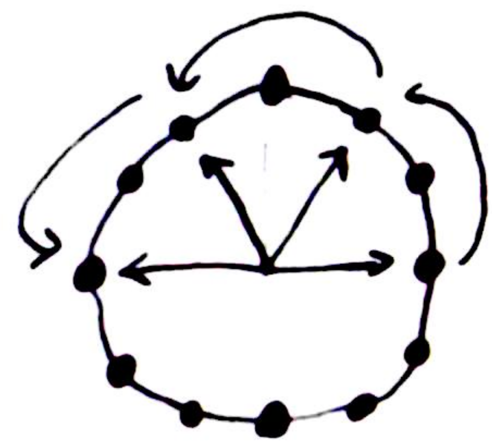
Jos n näytettä, askeleen pituus $\frac{2\pi}{n}$

Esim. $n = 12$

$\hat{e}_1$

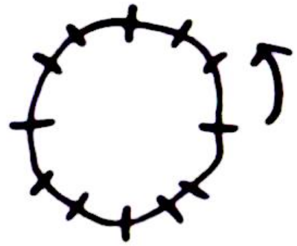


$\hat{e}_2$

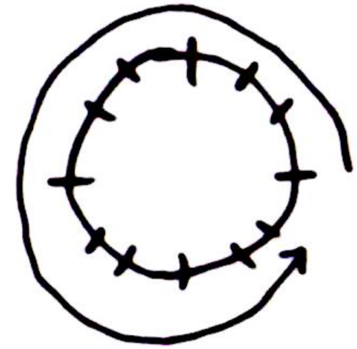


Erityisesti huomataan että

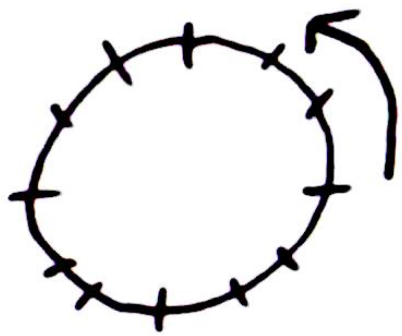
$\hat{e}_1$



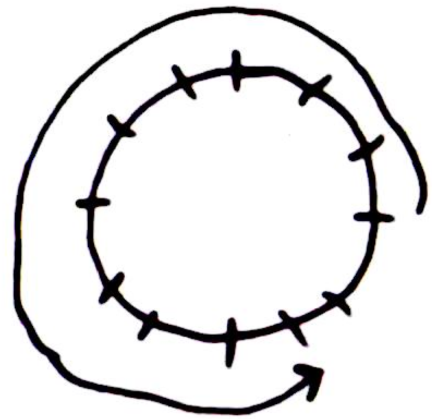
$\hat{e}_{n-1}$



$\hat{e}_2$



$\hat{e}_{n-2}$



Yleensä merkitään että F on f:n

Fourier-muunnos.

$$F = (F_0, F_1, F_2, \ldots F_{n-2}, F_{n-1})$$

Jos f oli reaalinen,

$$F_0 = \overline{f}$$

$$F_l = F_{n-l}^{*} \qquad \text{kompleksikonjugaatti}$$

Saadaan:

$$F_0 = a_0$$

$$F_1 = a_1 - i b_1 \qquad F_{n-1} = a_1 + i b_1$$

$$F_2 = a_2 - i b_2 \qquad F_{n-2} = a_2 + i b_2$$

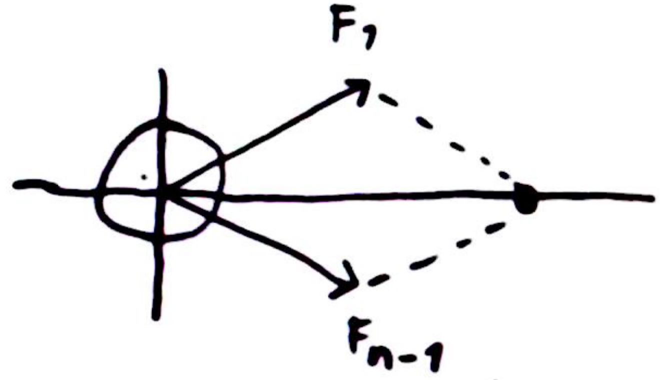
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Eli: kertoimet $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$b_1, b_2, \ldots$

ihan kuin aiemmin sivulla 4 ja 7.

Taajuuden l energia on jakautunut Fourier-kertoimiin F_l ja F_{n-l}



$$|F_l|^2 = F_l F_l^* = F_l F_{n-l} = (a_l - i b_l)(a_l + i b_l)$$

$$= a_l^2 + b_l^2$$

Vielä helpommin vaihekulmaesityksestä

$$F_l = k_l e^{-i\theta_l} \qquad |F_l|^2 = k_l^2$$

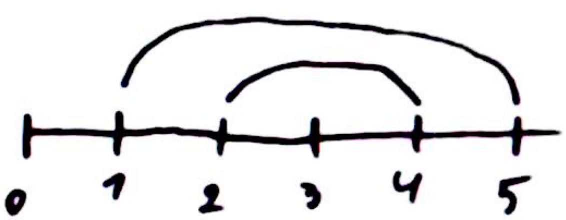
Joten energiaspektri funktio

$$E(0) = |F_0|^2$$ keskitunli

$$E(1) = 2|F_1|^2$$

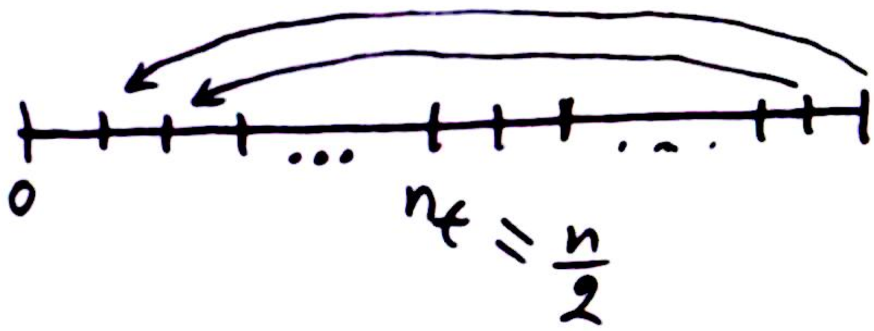
lisäksi

$$E\left(\frac{n}{2}\right) = |F_{n/2}|^2$$ jos n parillinen



$n=6$

"Taittuminen"



$\frac{n}{2}$:ta suuremmat termit kuvautuvat
alempia taajuuksia

n_f Nyquistin taajuus

Jos aikasarjana on u, v, w tai

vaikka $|V| = |(u, v, w)|$

kertoo Fourier-muunnos (siitä laskettu energiaspektri) varianssin, kuten $\overline{w'^2}$, jakautumisen eri taajuuksille.

Lisäksi: taajuus ~ pyörteiden koko

$\overline{w'^2} \sim$ TKE

Kolmogorovin samanlaisuusteoria

näytetty sekunnissa

keskituuli

aaltoluku $k = \frac{n}{2\pi U}$ (2π pois)

TKE-spektri $\Phi(k) \sim \epsilon^{2/3} \, k^{-5/3}$

$[TKE] = \frac{m^2}{s^2}$ $[\epsilon] = \frac{m^2}{s^3}$

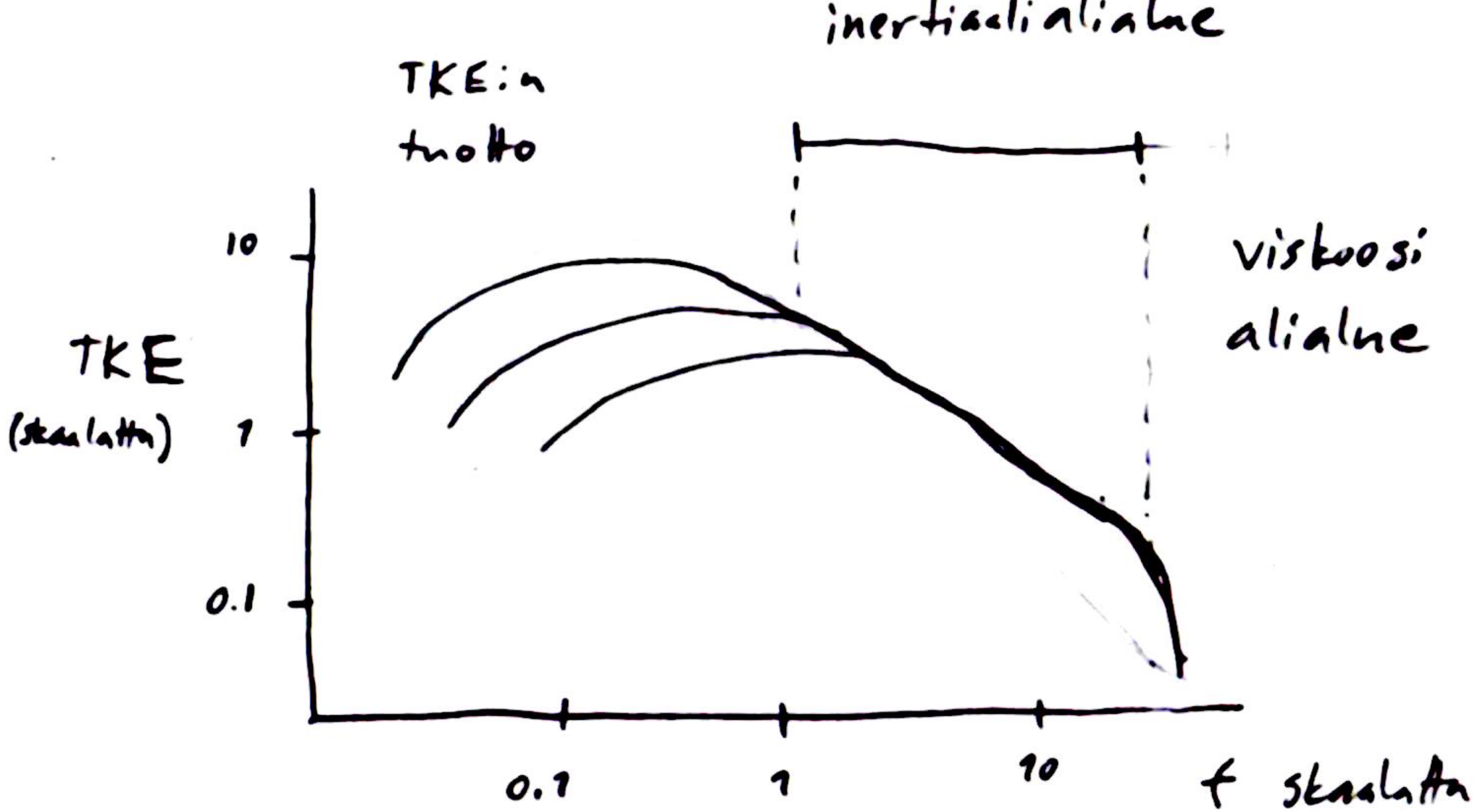
$[\Phi] = \frac{m^3}{s^2}$

$$\left(\frac{m^2}{s^3}\right)^{2/3} \left(m^{-1}\right)^{-5/3} = \frac{m^{4/3}}{s^2} \, m^{5/3}$$

$[k] = \frac{1}{m}$

$$= \frac{m^{9/3}}{s^2} = \frac{m^3}{s^2}$$

Energiakaskadi



Paitsi u, tai u' jne. aikasarjoille,
myös aikasarjoille $w'u'$, $w'\theta'$ jne.
voidaan tehdä Fourier/spektrianalyysiä.

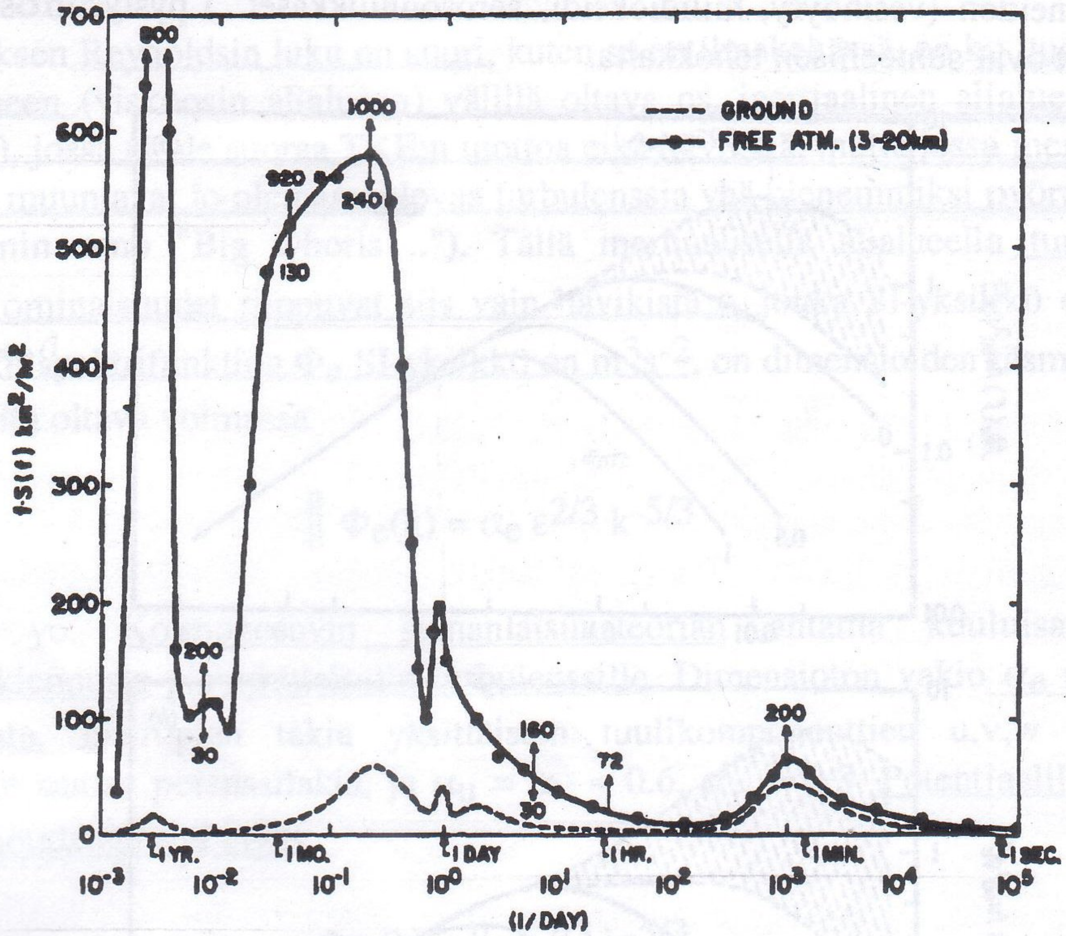
Tällöin spektrin energia ei ole oikeaa,
fysikaalista, energiaa.

$w'u'$ isot pyörteet siirtävät
$w'\theta'$ $w'q'$ pienetkin siirtävät

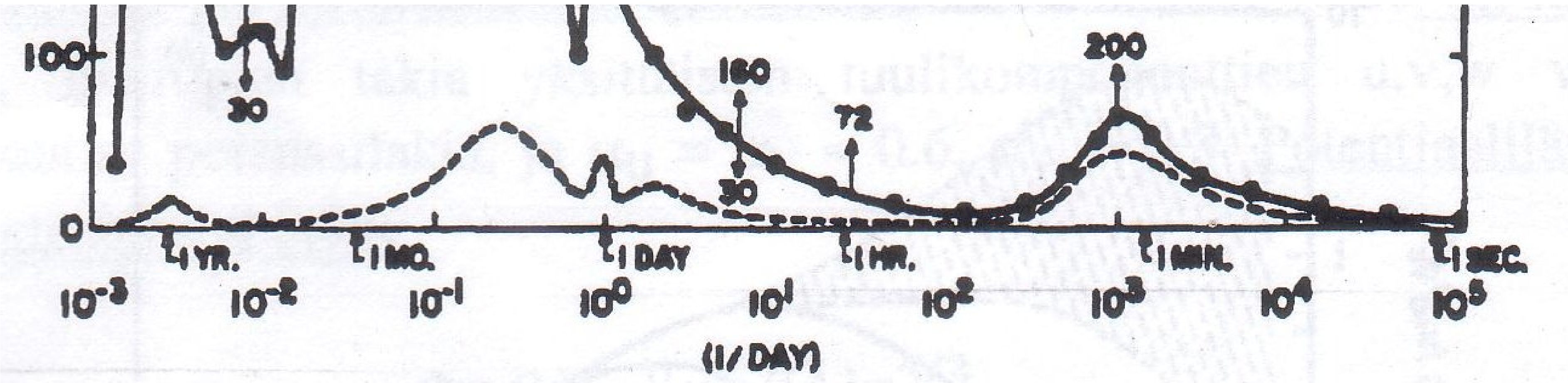
TKE-yhtälö voidaan kirjoittaa spektrimuodossa

$$TKE(k) = T + S + B + Tr - \epsilon$$

kuljetus taajuudelta toiselle



Kuva 6. Itä-länsisuuntaisen tuulen liike-energian spektri pintakerroksessa (katkoviiva) ja vapaassa ilmakehässä (yhtenäinen viiva) Brookhavenissa mitattuna (Vinnichenko, 1970).


100
0
30
160
30
72
200
1 YR.
1 MO.
1 DAY
1 HR.
1 MIN.
1 SEC.
10⁻³
10⁻²
10⁻¹
10⁰
10¹
10²
10³
10⁴
10⁵
(1/DAY)