NS ilman viskositeettitermiä

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = -\frac{1}{\rho} \nabla p + F$$

Muut voimat
- Coriolis
- painovoima

Tai oikeastaan, sisällytetään nyt painegradietti-voimakin F:ään:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = F$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = F$$

$$V = (u, v, w)$$

Tämähän tarkoittaa 3 erillistä yhtälöä:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (V \cdot \nabla) u = F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (V \cdot \nabla) v = F_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (V \cdot \nabla) w = F_z$$

$$(V \cdot \nabla)$$

$$= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(V \cdot \nabla) u$$

$$= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

otetaan nyt vaikka $\frac{\partial u}{\partial t} + (V \cdot \nabla) u = F_x$

Reynolds-hajotelma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t}$$

$$(V \cdot \nabla) u = (\bar{V} + V') \cdot \nabla (\bar{u} + u')$$

$$= \bar{V} \cdot \nabla \bar{u} + \bar{V} \cdot \nabla u' + V' \cdot \nabla \bar{u} + V' \cdot \nabla u'$$

$$F_x = \overline{F_x} + F_x'$$

Huomautanpa nyt termistä

$$(V \cdot \nabla) V$$

V = vektori

∇ = "vektori"

$V \cdot \nabla$ = pistetulona skalaari

joten koko termi on vektori.

$$(V \cdot \nabla) u$$

on puolestaan skalaari

$$(V \cdot \nabla) = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(V \cdot \nabla) u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Mutta voitaisiin laskea myös toisessa järjestyksessä

$$V \cdot (\nabla u) = (u, v, w) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \text{sama}$$

Myös tapauksessa $(V \cdot \nabla) V$ voisi ajatella

$V \cdot (\nabla V)$ missä $\nabla V = (\nabla u, \nabla v, \nabla w)$

eli vektori jonka komponentit ovat vektoreita

Tällaista katsutaan tensoriksi, tai 2-asteen tensoriksi (vektori olisi 1-asteen tensori ja skalaari 0-asteen).

Se kyllä muuttuu takaisin vektoriksi kun operoidaan $V\cdot$:llä.

On siis ihan sama lasketaanko

$$(V\cdot\nabla)V \quad \text{vai} \quad V\cdot(\nabla V)$$

joten voidaan kirjoittaa ilman sulkeita $\underline{V\cdot\nabla V}$

Takaisin asiaan:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \underline{\underline{\frac{\partial u'}{\partial t}}} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{u} + \underline{\underline{\bar{V} \cdot \nabla u'}} + \underline{\underline{V' \cdot \nabla \bar{u}}} + V' \cdot \nabla u' = \overline{F_x} + \underline{\underline{F_x'}}$$

$$\overline{(\ldots)} = 0$$

Keskiarvoistus:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{u} + \overline{V' \cdot \nabla u'} = \overline{F_x}$$

Tai: $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{u} = -\overline{V' \cdot \nabla u'} + \overline{F_x}$$

Taas välihuomautus:

Jatkuvuusyhtälö

(aineen häviämättömyyden laki)

Yleinen muoto: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$

Kokoonpuristumattomuusapproksimaatio:

$$\rho = \text{vakio}$$

$$\nabla \cdot (\rho V) = 0 \qquad \rho \nabla \cdot V = 0 \qquad \nabla \cdot V = 0$$

Koska

$$\nabla \cdot (V'u') = V' \cdot \nabla u' + u' \underbrace{\nabla \cdot V'}_{=0} \quad \text{(tulon derivaatta)}$$

(jatkuvuusyhtälö)

niin termi

$$\overline{V' \cdot \nabla u'}$$

on tapana kirjoittaa: $\overline{\nabla \cdot (V'u')} = \nabla \cdot \overline{V'u'}$

Niinsanottu vuomuoto

Hetkellinen: $\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = F_x$

Aikakeskiarvoistettu:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{V} \cdot \nabla \overline{u} = -\nabla \cdot \overline{u'V'} + \overline{F_x}$$

Mukaan ilmestyy uusi termi: kovarianssi

$\overline{u'V'}$ on vektori: $(\overline{u'u'}, \overline{u'v'}, \overline{u'w'})$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{u} = -\nabla \cdot \overline{u'V'} + \overline{F_x}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \right) + \overline{F_x}$$

Samanlaiset yhtälöt myös tuulennopeuksille $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja mille tahansa muullekin skalaarisuureelle, kuten $\bar{\theta}$, $\bar{q}$ tai aineen X pitoisuudelle

Mille tahansa suureelle s kovarianssit

$$\overline{s'u'} \quad \overline{s'v'} \quad \overline{s'w'}$$

tarkoittavat sen vuota, turbulenttista kuljetusta

1-ulotteisessa rajakerrosmallissa lähinnä kiinnostaa pystyvuot:

$\overline{u'w'}$ liikemäärän vuo
$\overline{v'w'}$

$\overline{\theta'w'}$ lämmön vuo

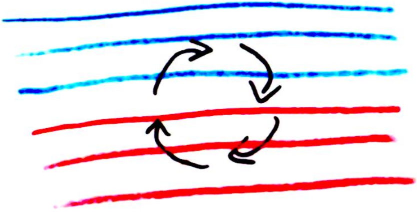
$\overline{q'w'}$ kosteuden vuo

Mitä termi $\overline{\theta' w'}$ (esim.) tarkoittaa?

Kun w' on hetkellisesti ylöspäin, ilma on lämmintä

Kun w' on hetkellisesti alaspäin, ilma on kylmää

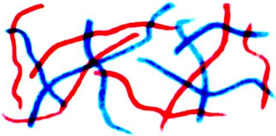
($\overline{w}$ yleensä 0)



$\downarrow$

kuljetus/sekoittuminen

$\downarrow$



SMEAR III Kumpulassa

Ultraäänianemometri

Prujun (s. 8) käsitys aaltoluvusta

Yleensä aaltoluku $k = \frac{1}{\lambda}$ ($\lambda =$ aallonpituus) eli montako aaltoa metrillä.

Joskus kuitenkin ajatellaan että yhden aallon pituus on 2π eikä 1, ja mitataan "radiaaneina" eikä kokonaisina aaltoina, saadaan ns. kulma-aaltoluku $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ eli montako aallon $\frac{1}{2\pi}$-osaa on metrillä.

Liikemäärän turbulenttiset vuot

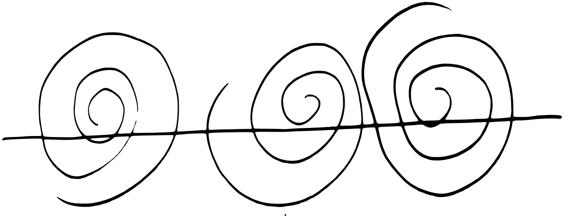
$$\tau = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$ = Reynoldsin stressitensori (symmetrinen)

Reynolds-stressi esim. suuruusluokkaa $0.05\ m^2/s^2$

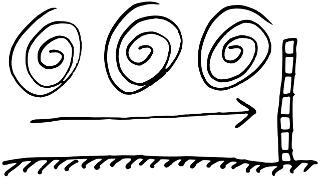
Viskoosi stressi $0.0001\ m^2/s^2$

Oikeastaan $\overline{u'w'}$ on nopeuden vuo, $\rho\overline{u'w'}$ olisi liikemäärän vuo. Yleensä kuitenkin puhutaan vähän mitä sattuu.

Taylorin hypoteesi



mittaus hetkellä
t x-akselin
suunnassa



mittaus yhdessä pisteessä
aikasarjana

$$x = \bar{u} t$$

$$s(x) = s(\bar{u} t)$$

Takaisin liikeyhtälöihin:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u} + \left(\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'u'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}\right) + \overline{F_x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{v} + \left(\overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'}\right) + \overline{F_y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{w} + \left(\overline{u}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{w'u'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{w'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{w'w'}\right) + \overline{F_z}$$

Ajatellaan vain pystysuuntaista rajakerrosmallia

ei pystytuulta (subsidenssia): $\overline{w} = 0$

horisontaalisesti homogeeninen: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} = 0$

Jäljelle jää:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'} + \overline{F_x}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'} + \overline{F_y}$$

- vaakasuuntainen turbulenttinen kuljetus ei ole nolla, mutta sen nettovaikutus on
- keskituulen advektiota ei sovi jättää pois "yksinkertaisuuden vuoksi" (prujn) vaan koska oletuksista seuraa

Rajakerrosmalli

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + f\bar{u} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \overline{S_\theta} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{\theta'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \overline{S_q} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{q'w'}$$

- S_θ, S_q lämmön ja kosteuden tuotto ja nielu.
- vuotermit uusia tuntemattomia!

Huomautus. Jos hetkellisestä (aikakeskiarvoistamattomasta) yhtälöstä

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x$$

heittäisi heti pois termejä periaatteilla

$$w=0, \ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

jäljelle jäisi vain

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_x \quad , \ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}+u') = \overline{F_x} + F_x'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \overline{F_x} \qquad (\text{väärin})$$

Turbulenttiset liikemäärän vuot syntyvät nimenomaan termin $V \cdot \nabla V$ täyden muodon Reynolds-keskiarvoistamisesta.

On virhe olettaa hetkellinen w tai $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ termi nollaksi. Vasta aikakeskiarvoistetuille yhtälöille voi tehdä yksinkertaistavia oletuksia. $\overline{w} = 0$ on järkevämpi oletus kuin $w = 0$

Samoin $u \frac{\partial u}{\partial x}$ vs. $\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$

Korostan että vuot

$$\overline{u'w'} \quad \overline{v'w'} \quad \overline{\theta'w'} \quad \overline{q'w'}$$

ovat uusia tuntemattomia eikä meillä ole edeltävän pohjalta vielä mitään tietoa miltä nämä termit voisivat näyttää.

Yksi tapa olisi palata Reynolds-hajotelmaan ennen keskiarvoistamista. Tässä nyt mille tahansa suureelle s:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + V \cdot \nabla s = F \qquad \text{(hetkellinen)}$$

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial s'}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{s} + \bar{V} \cdot \nabla s' + V' \cdot \nabla \bar{s} + V' \cdot \nabla s' = \bar{F} + F'$$

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{s} = -\nabla \cdot \overline{s'V'} + \bar{F} \qquad \text{(keskiarvoistettu)}$$

B A

Lasketaankin A − B

$$A: \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial s'}{\partial t} + \bar{V}\cdot\nabla\bar{s} + \bar{V}\cdot\nabla s' + V'\cdot\nabla\bar{s} + V'\cdot\nabla s' = \bar{F} + F'$$

$$B: \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{V}\cdot\nabla\bar{s} = \bar{F} - \nabla\cdot\overline{s'V'}$$

$$A-B: \frac{\partial s'}{\partial t} = -\bar{V}\cdot\nabla s' - V'\cdot\nabla\bar{s} - V'\cdot\nabla s' - \nabla\cdot\overline{s'V'} + F'$$

Eli saadaan kyllä yhtälö muotoa

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = (\text{jotain})$$

Esimerkiksi suureille s ja w

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = C \qquad \Rightarrow \qquad w' \frac{\partial s'}{\partial t} = w' C$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = D \qquad \qquad s' \frac{\partial w'}{\partial t} = s' D$$

Tulon derivaatta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s'w') = s' \frac{\partial w'}{\partial t} + w' \frac{\partial s'}{\partial t} = s' D + w' C$$

Nyt voidaan Reynolds-keskiarvoistaa

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{s'w'} = \overline{s'D} + \overline{w'C}$$

mutta esimerkiksi C $(= A - B)$ sisältää esimerkiksi termin

$$V' \cdot \nabla s' = (u', v', w') \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} s', \frac{\partial}{\partial y} s', \frac{\partial}{\partial z} s'\right)$$

$$= u' \frac{\partial}{\partial x} s' + v' \frac{\partial}{\partial y} s' + w' \frac{\partial}{\partial z} s'$$

Joten $w'C$ sisätää mm. $w'(V' \cdot \nabla s')$

joka sisältää mm.

$$w'w' \frac{\partial}{\partial z} s' \quad \text{tai keskiarvona} \quad \overline{w'w' \frac{\partial}{\partial z} s'}$$

näille ei voi tehdä mitään.

Tai no, muiden samanlaisten termien kanssa, kikkailemalla tulon derivaatan ja jatkuvuus-yhtälön kanssa, ne saa kyllä palautettua vuomuotoon, esim.

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w's'}$$

Mutta joka tapauksessa yhtälöt 2-momentin

termeille

$$\overline{u'u'}$$

$$\overline{u'v'} \quad \overline{u'w'}$$

$$\overline{v'v'} \quad \overline{v'w'} \quad \overline{w'w'}$$

sisältävät uusina tuntemattomina 3-momentin termejä

$$\overline{u'u'u'}$$

$$\overline{u'u'v'} \quad \overline{u'u'w'}$$

$$\overline{u'v'v'} \quad \overline{u'v'w'} \quad \overline{u'w'w'}$$

$$\overline{v'v'v'} \quad \overline{v'v'w'} \quad \overline{v'w'w'} \quad \overline{w'w'w'}$$

1. aste

$$\overline{u}$$
$$\overline{v} \quad \overline{w}$$

$\Longrightarrow$

2. aste

$$\overline{u'^2}$$
$$\overline{u'v'} \quad \overline{u'w'}$$
$$\overline{v'^2} \quad \overline{v'w'} \quad \overline{w'^2}$$

$\Longrightarrow$

3. aste

$$\overline{u'^3}$$
$$\overline{u'^2v'} \quad \overline{u'^2w'}$$
$$\overline{u'v'^2} \quad \overline{u'v'w'} \quad \overline{u'w'^2}$$
$$\overline{v'^3} \quad \overline{v'^2w'} \quad \overline{v'w'^2} \quad \overline{w'^3}$$

$\Longrightarrow$ 4. aste

Turbulenssisulkeuma

Koskaan ei kuitenkaan tule valmista. Aina n kertaluvun termit sisältävät uusina tuntemattomina $n+1$ kertaluvun termejä. Tätä kutsutaan turbulenssin sulkemisen ongelmaksi.

Käytännössä se ratkaistaan kehittämällä tuntemattomille termeille esitys (parametrisointi) tunnettujen termien avulla.

Tällainen parametrisointi on aina jossain mielessä hihasta revitty.