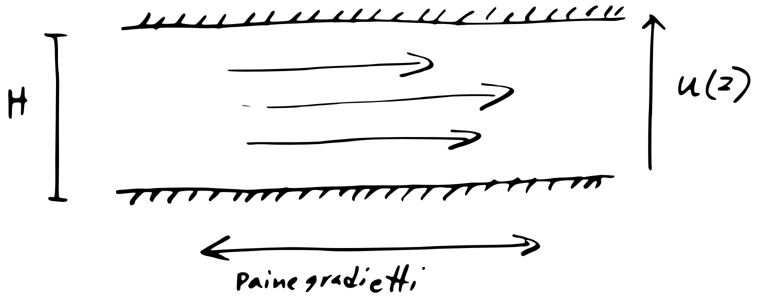
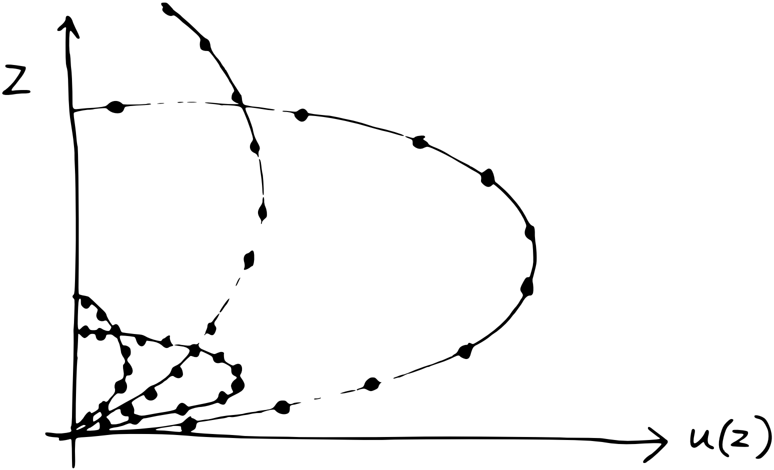
Similariteetti / Dimensioanalyysiä

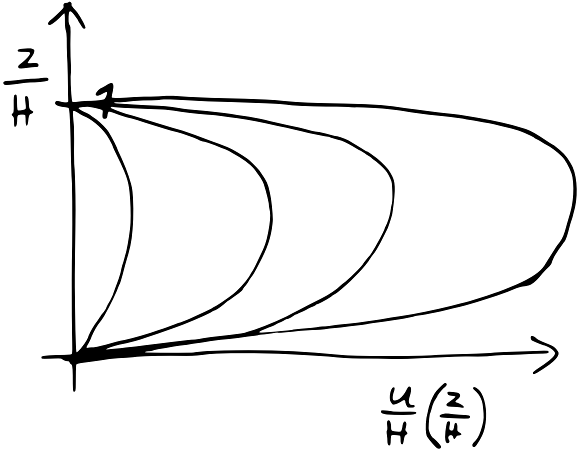
Esimerkki (laskarit): virtaus 2 levyn välissä (tässä ei liikkuvia levyjä).



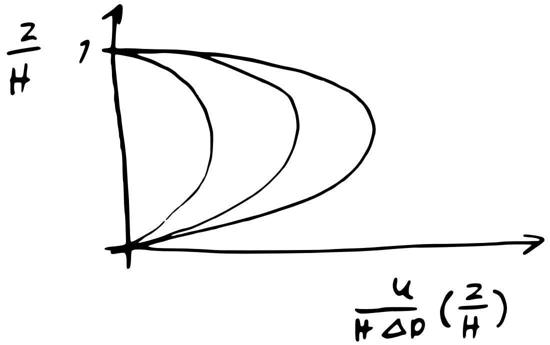
Mitataan paljon erilaisia tapauksia



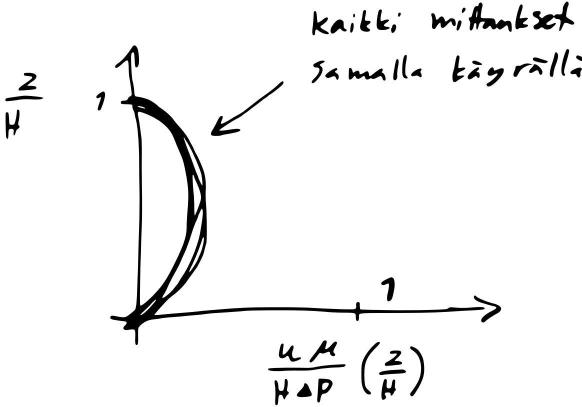
Idea: skaalataan z H:lla



Skaalataan u paine-erolla Δp



Skaalataan (kerrotaan) u viskositeetilla μ



Miksi näin?

laskareista tehtävän vastaus:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} z^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} H z = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(z^2 - Hz\right)$$

$z' = \frac{z}{H}$ $\quad z = Hz'$

$$u' = \frac{\mu}{H \Delta P} u$$

$$u(z') = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(H^2 z'^2 - H^2 z'\right)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta P}{H}\right)$$

$$u'(z') = \frac{1}{2}\left(z'^2 - z'\right)$$

(oikeastaan $\Delta P < 0$)

Idea oli siirtyä dimensiottomiin suureisiin

$u(z)$ $\quad [u] = \frac{m}{s}$ $\quad [z] = m$

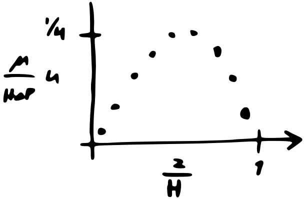
Tilannetta kuvaavat suureet:

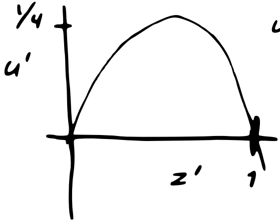
$H, \mu, \Delta P$

$[H] = m$ $\quad [\mu] = Pa\ s$ $\quad [\Delta P] = Pa$

$$\left[\frac{z}{H}\right] = 1 \quad \left[\frac{\mu}{H \Delta P} u\right] = \frac{Pa\ s}{m\ Pa} \frac{m}{s} = 1$$

Tässä tapauksessa tunnettiin ilmiötä kuvaava laki (NS yhtälö) ja jopa osattiin ratkaista se. Mutta vaikka ei tunnettaisi, jos keksitään hyvä dimensioton skaalaus, voidaan muutaman kokeen avulla arvata oikea vastaus





$u' = \frac{1}{2}(z' - z'^2)$

Vielä parempi: jos kohteena ei ole funktio, kuten $u(z)$, vaan skalaari, kuten virtauksen keskinopeus (tai pelkkä kokonaisvirtaama), se voitaisiin ratkaista, vakiokerrointa vaille.

$$\bar{u} \sim \frac{H \, \Delta P}{\mu}$$

Putken virtaama $\quad kg/s$

$[D] = m \quad [\Delta P] = Pa = \frac{kg}{ms^2} \quad [\mu] = Pa\,s = \frac{kg}{ms}$

tarvitaan lisäksi $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

Tarpeeksi kun miettii:

$$\frac{[\Delta P]\,[\rho]\,[D]^3}{[\mu]} = \frac{Pa \;\; kg/m^3 \;\; m^3}{Pa\,s} = \frac{kg}{s}$$

eli virtaama $\sim \frac{\Delta P \,\rho\, D^3}{\mu}$

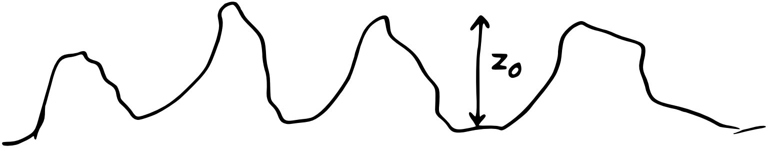
Entäpä turbulenttinen virtaus karkean pinnan lähellä?

Nyt viskositeetti ν ei ole oleellinen.

Toisaalta pinnan karkeus pitää kuvata jollain suureella.

Jos pinnan rosoisuutta mitataan pituuden yksiköillä, saadaan tästä suoraan relevantti pituusskaala

$$z' = \frac{z}{z_0}$$



Siis, $\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{z}{z_0}\right)$

Mittausten mukaan näyttää siltä että

f on logaritmi

Vaikka halutaan profiili $u(z)$,

voidaan myös kikkailla ja olla

kiinnostuneita "skalaarista"

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \frac{m/s}{m} = \frac{1}{s}$$

$$\left[\frac{u_*}{z}\right] = \frac{m/s}{m} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{u_*}{z}$$

Sattuneesta syystä merkitään verrannollisuus-

kerrointa $\frac{1}{k}$:lla,

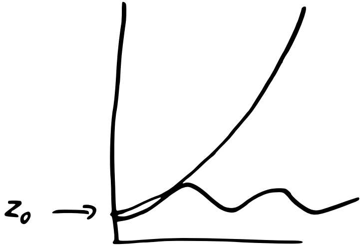
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k} \frac{u_*}{z}$$

$$\int_0^z \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{u_*}{k} \int_0^z \frac{1}{z} dz = \frac{u_*}{k} \ln z + C$$

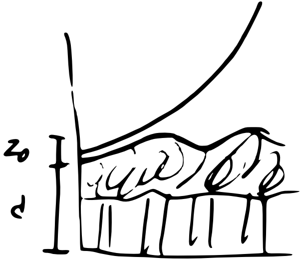
valitaan $C = -\ln z_0$,

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0}$$

$$u(z) = \frac{u}{u_*} \ln \frac{z}{z_0}$$



$$u(z) = \frac{u}{u_*} \ln \left(\frac{z-d}{z_0} \right)$$



Neutraalissa tapauksessa ajateltiin tuulivväännettä

$$-\overline{u'w'}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

"järkeiltiin" että se riippuu suureista $\overline{u'w'}$ ja z, ja haluttiin dimensioton skaalaus. Lisäksi on tapana merkitä

$$u_* = \sqrt{-\overline{u'w'}}$$

$$-\overline{u'w'}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$-\overline{u'w'}$ saadaan dimensiottomaksi skaalaamalla se itsellään, eli u_*^2:lla. Triviaalia.

$$\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right] = \frac{m/s}{m} = \frac{1}{s}$$

$$[u_*] = \frac{m}{s} \qquad [z] = m$$

$$\left[\frac{u_*}{z}\right] = \frac{1}{s}$$

$$\frac{-\overline{u'w'}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}{u_*^2\,\frac{u_*}{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Dimensioton tuulivääntö

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Empiirisesti havaitaan että tämä on neutraalissa pintakerroksessa vakio

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \text{vakio} = \frac{1}{k}$$ von Kármánin vakio

Integroimalla saatiin logaritminen tuuliprofiili

$$u(z) = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Huomautus: dimensioton tuulivääntö

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{k}$$

yleensä kuitenkin on tapana merkitä että

$$\phi_m = \frac{kz}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 1$$

on dimensioton tuulivääntö.

(Von Kármánin vakio k on dimensioton)

Tuulivääntö: $-\overline{u'w'}\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$

Huomautus: koska normalisoidessa $\overline{u'w'}$ katoaa kun se jaetaan itsellään (eli u_*^2:lla), voidaan normalisointia muotoa

$$\frac{kz}{u_*}\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

yhtä hyvin ajatella tuulivääntöön, tai myös tuuligradientin (eli $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$:n) dimensiottomana muotona.

Ei-neutraali pintakerros, Monin-Obukhov-teoria

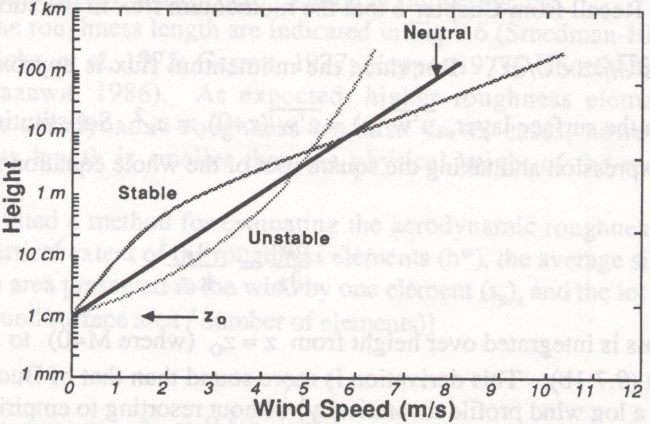
Monin & Obukhov (1954) järkeilivät että lämmön (ja kosteuden) läsnäollessa "asiat" pintakerroksessa riippuvat suureista

$$z\ ,\ u_*\ ,\ \frac{g}{\bar{\theta}_v}\ ,\ -\overline{w'\theta_v'}$$

noste

virtuaali potentiaali lämpötilan pystyvuo (pinnassa)

Fig. 9.5
Typical wind speed profiles vs. static stability in the surface layer.



9.7.1 Wind Profile in Statically Neutral Conditions

Nyt jos kuvittelisi tekevänsä dimensioanalyysiä ja näistä haluaisi dimensiottoman yhdistelmän, pitää selvästikin z jakaa jollain yhdistelmällä

$$\left[\frac{z}{L}\right] = \frac{m}{m} = 1$$

Saadaan: $L = \dfrac{-u_*^3}{\frac{g}{\bar{\theta}_v}\,\overline{w'\theta_v'}} = \dfrac{-\bar{\theta}_v u_*^3}{g\,\overline{w'\theta_v'}}$

$$\left[\frac{-\bar{\theta}_v u_*^3}{g\,\overline{w'\theta_v'}}\right] = \frac{T\,\frac{m^3}{s^3}}{\frac{m}{s^2}\,\frac{m}{s}\,T} = m$$

(T = mikä ikinä onkaan θ:n yksikkö)

tätä kutsutaan: <u>Obukhov-pituus</u>

$$L = \frac{-\bar{\theta}_v\, u_*^3}{k\, g\, \overline{w'\theta_v'}}$$

yleensä tuo von Kármánin vakio

vielä tungetaan tuonne.

(Stull, Garrat, jne.)

Toinen tapa ajatella asiaa:

TKE-yhtälö

väänne

noste

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{k_a w'} + \frac{\overline{p'w'}}{\rho}\right] - \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{\overline{\theta_v}}\overline{w'\theta_v'} - \epsilon$$

Tästä saadaan dimensioton kertomalla puolittain

$\frac{z}{u_*^3}$:lla. $\left[\frac{z}{u_*^3}\right] = \frac{m}{\frac{m^3}{s^3}} = \frac{s^3}{m^2}$ $\left[\frac{\partial k}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}{\partial t}\right]$

$$= \frac{m^2/s^2}{s} = \frac{m^2}{s^3}$$

nosteterm: $\dfrac{z\, g\, \overline{w'\theta_v'}}{\overline{\theta_v}\, u_*^3} = \dfrac{z}{L}$

(saadaan myös dimensioton väänne)

Huomautuksia

Prujussa on merkitty

$H = \rho c_p \overline{\theta' w'}$ Havaittavan lämmön vuo

$Q = \overline{\theta' w'}$ kinemaattinen lämmön vuo

$E = \rho \overline{q' w'}$ vesihöyryvuo

ja

$$T_* = \frac{-Q}{u_*} = \frac{-\overline{\theta' w'}}{u_*}$$ skaalalämpötila $[T_*] = [\theta']$

$$q_* = -\frac{E}{\rho u_*} = \frac{-\rho \overline{q' w'}}{\rho u_*}$$ skaalakosteus $[q_*] = [q]$

Prujussa on: $L = \dfrac{-T\, u_*^3}{k g \beta Q}$

Meillä/Stullissa oli: $L = \dfrac{-\overline{\theta_v}\; u_*^3}{k g\, \overline{w'\theta_v'}}$

eli $\beta Q = \beta\, \overline{\theta' w'}$ vs. $\overline{w'\theta_v'}$

β kuvaa kosteuden vaikutusta nosteeseen.

Samoin, edellä teimme dimensioanalyysiä suureilla:

$$z \ , \ u_* \ , \ \frac{g}{\theta_v} \ , \ -\overline{w'\theta_v'}$$

Prujussa:

$$z \ , \ u_* \ , \ \frac{g}{\theta} \ , \ Q = \overline{\theta' w'} \ , \ E = \rho \overline{q' w'}$$

Eli kosteuden voi käsitellä erikseen, tai ottaa virtuaalipotentiaalilämpötilaa.

Nyt toivotaan että

(zeta) $$\zeta = \frac{z}{L}$$

on oikealla lailla skaalattu dimensioton korkeus eri laisissa oloissa, ja että dimensiottomat gradientit

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{z}{T_*}\frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \frac{z}{q_*}\frac{\partial q}{\partial z}$$

voidaan ilmaista ζ:n funktiona.

(tästä eteenpäin $u = \bar{u}$)

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_m(\zeta)$$

$$\frac{z}{T_*}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_h(\zeta)$$

$$\frac{z}{q_*}\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_h(\zeta)$$

Huomautus:

$$L = \frac{-\overline{\theta}_v\, u_*^3}{k\, g\, \overline{w'\theta_v'}}$$

Stabiilissa tilanteessa $\overline{w'\theta_v'} \approx \pm 0$

joten $L = \pm \infty$

joten $\zeta = \frac{z}{L} = \pm 0$

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_m(\zeta)$$

Stabiilissa $\zeta = 0$

jos $\phi_m(0) = 1$, saadaan

logaritminen tuulikki i

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k}$$