Monin - Obukhov teoria

Joko "järkeillään" että virtaukset ominaisuudet tietyssä kohtaa riippuvat:

$$z \,,\, u_* \,,\, Q_0 \,,\, E_0 \,,\, \frac{g}{\overline{\theta}}$$

noste

kosteuden vuo

korkeus

liikemäärän vuo

lämmön vuo

(Ajatellaan pintakerrosta, jossa vuot ~ vakioita)

Tai katsotaan asiaa kuvaavia luonnonlakeja, että mitkä termit asiaan vaikuttavat.

No, turbulenttisen virtauksen kanssa on vähän ongelma, että osataanko kirjoittaa edes asiaa kuvaavat yhtälöt, mutta katsotaan nyt vaikka 1.5-asteen sulkemaa 4. luennolta:

1.5 asteen sulkeminen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f(\bar{v} - v_g) - \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -f(\bar{u} - u_g) - \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \qquad - \frac{\partial}{\partial z}\overline{w'\theta'}$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} = -\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{g}{\theta}\overline{w'\theta'} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{kw'} + \frac{\overline{p'w'}}{\bar{\rho}}\right) - \varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\theta'^2} = -2\overline{w'\theta'}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{w'\theta'^2} - 2\varepsilon_\theta - \varepsilon_R$$

Kuiva ilmakehä, $\bar{w} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} = 0$

löytyi:

liikemäärän vuo $\overline{u'w'}$ $\overline{v'w'}$ $\sim u_*$

lämmön vuo $\overline{\theta'w'}$ $\sim Q_0$

kosteuden vuo $\overline{q'w'}$ $\sim E_0$

(no tätä ei ollut kuivan ilman mallissa, mutta vastaavassa kostean ilman olisi)

noste $= \frac{g}{\bar{\theta}}$

z pitää vaan älytä mukaan kanssa

dissipaatiot unohdamme

Niin tai näin, saadaan suureet

$$u_* = \sqrt{-\overline{u'w'}}$$

$$H = \rho c_p \overline{\theta' w'} \quad \text{tai} \quad Q = \overline{\theta' w'}$$

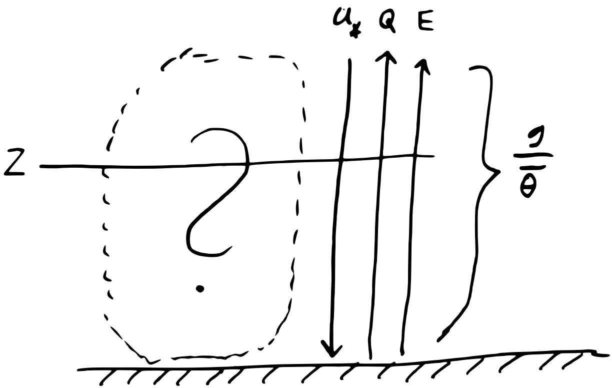
$$E = \rho \overline{q' w'}$$

$$\frac{g}{\overline{\theta}}$$

näiden kahden sijaan vaihtoehtoisesti

$$\overline{\theta_v' w'}$$

Yritetään niing ratkoa asioita pintakerroksessa



Ja dimensiotonta skaalaamista varten muodostetaan:

Stull ↙ pruju ↓

<u>skaalapituus</u>

$$L = \frac{-u_*^3 \, \frac{g}{\overline{\theta_v}}}{k \, \overline{w'\theta_v'}} \quad \text{tai} \quad \frac{-u_*^3 \, T_0}{g \, \beta \, Q_0}$$

<u>skaala lämpötila</u>

$$T_* = \frac{-\overline{\theta' w'}}{u_*}$$

<u>skaala kosteus</u>

$$q_* = \frac{-\overline{q' w'}}{u_*}$$

Ajatellaan oivelkkaasti että dimensiottomat gradientit riippuvat skaalatusta korkeudesta aina samalla tavalla

$$\xi = \frac{z}{L}$$

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_m(\xi)$$

$$\frac{z}{T_*}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_h(\xi)$$

$$\frac{z}{q_*}\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_h(\xi)$$

Huomautus

$$L = \frac{-u_*^3 \frac{g}{\overline{\theta}_v}}{k\, \overline{w'\theta_v'}} \quad \text{tai} \quad \frac{-u_*^3 T_0}{g \beta Q_0}$$

• lämmön vuo

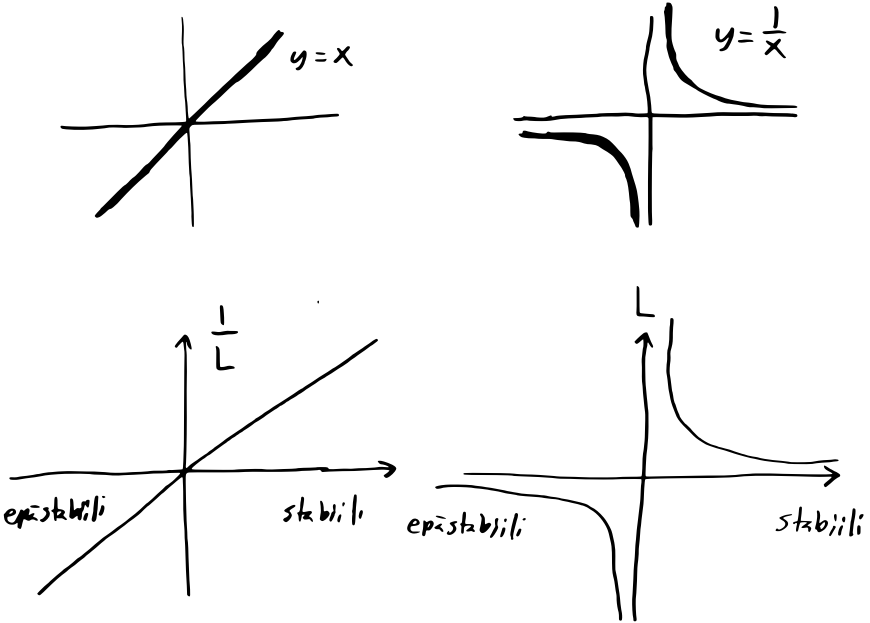
Stabiilissa lämmön vuo < 0, $L > 0$

Epästabiilissa > 0, $L < 0$

Neutraalissa $= 0$, $L = \pm\infty$

Toinenkin huomautus

Erittäin epästabiili	$-100\,\mathrm{m} < L < 0$
epästabiili	$-10^5\,\mathrm{m} < L < -100\,\mathrm{m}$
neutraali	$\lvert L \rvert > 10^5\,\mathrm{m}$
stabiili	$10\,\mathrm{m} < L < 10^5\,\mathrm{m}$
hyvin stabiili	$0 < L < 10\,\mathrm{m}$


y = x
y = 1/x
1/L
epästabiili
stabiili
L
epästabiili
stabiili

Universaalifunktiot ϕ_m ja ϕ_h

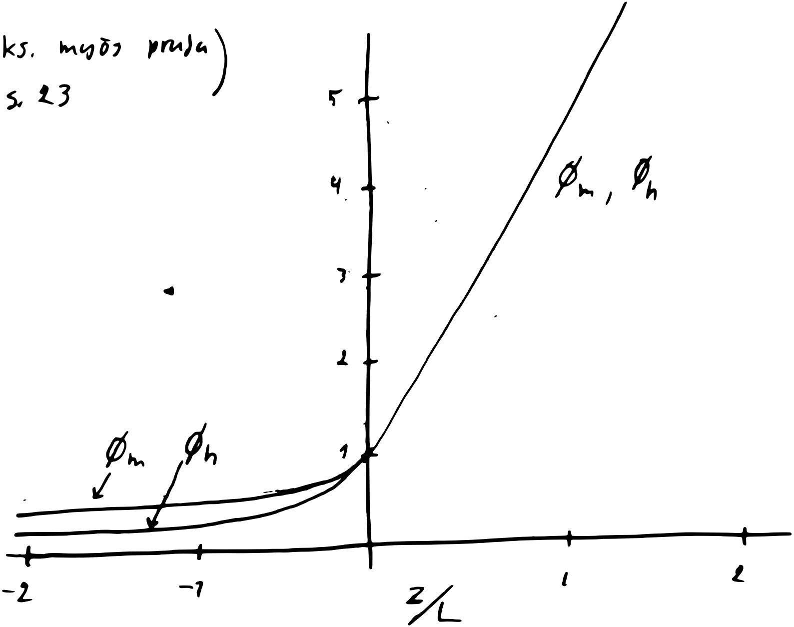
Businger – Dyer muodot

$$\phi_m(\zeta) = \begin{cases} 1 + 5\zeta & \text{kun } \zeta > 0 \quad (\text{stabiili}) \\ (1 - 16\zeta)^{-1/4} & \text{kun } \zeta < 0 \quad (\text{epästabiili}) \end{cases}$$

$$\phi_h(\zeta) = \begin{cases} 1 + 5\zeta & \text{kun } \zeta > 0 \\ (1 - 16\zeta)^{-1/2} & \text{kun } \zeta < 0 \end{cases}$$

stabiilissa $\phi_m = \phi_h$, epästabiilissa $\phi_m^2 = \phi_h$

(ks. myös pruda
s. 23)



Vieläkin huomautus

Vaihtokerroin määriteltiin

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial u}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad K_m = -\frac{\overline{u'w'}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

Dimensioton tuuligradientti

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_m(\zeta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{zk}\phi_m(\zeta)$$

$$K_m = \frac{u_*^2}{\frac{u_*}{zk}\phi_m(\zeta)} = z k u_* \frac{1}{\phi_m(\zeta)}$$

$\phi_m(\zeta) > 0$ stabiilissa

$\phi_m(\zeta) < 0$ epästabiilissa

Takaisin asiaan, meillä siis oli

$$\frac{z}{u_*}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_m(\zeta)$$

$$\frac{z}{T_*}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_h(\zeta)$$

$$\frac{z}{q_*}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_h(\zeta)$$

ja univesaalifunktiolle ϕ_m, ϕ_h on tunnetut muodot. Voidaan siis ratkaista laskemalla. Käydään kuitenkin läpi askel askeleelta.

Merkitään sillä mitä tahansa suuretta,

$$\frac{z}{s_*}\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{k}\phi_s(\zeta)$$

$s = u, \theta, q$

$s_* = u_*, T_*, q_*$

$\phi_s = \phi_m, \phi_h$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{s_*}{kz}\phi_s$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{s_*}{kz} \phi_s$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial s}{\partial z} dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{s_*}{kz} \phi_s \, dz$$

$$s(z_2) - s(z_1) = \frac{s_*}{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z} \phi_s \, dz$$

Jos olisi $\phi_s = 1$, integraali laskemalla saataisiin logaritminen tuulilaki. Muokataan hieman termiä $\frac{1}{z} \phi_s$ ...

Termi $\frac{1}{z}\phi_s$

Koska ϕ_s kuvaa poikkeamaa (jos tilanne ei ole neutraali) logaritmisesta tuulilaista, kikkaillaan termi sellaiseen muotoon että logaritminen tuulilaki ja poikkeama voidaan integroida erikseen:

$$\frac{1}{z}\phi_s = \frac{1}{z}(1 - 1 + \phi_s) = \frac{1}{z} - \frac{1-\phi_s}{z}$$

$$s(z_2) - s(z_1) = \frac{s_*}{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z} \phi_s \, dz$$

$$= \frac{s_*}{k} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1-\phi_s}{z} \right) dz$$

$$= \frac{s_*}{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z} \, dz - \frac{s_*}{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1-\phi_s}{z} \, dz$$

$$= \frac{s_*}{k} \ln \frac{z_2}{z_1} - \frac{s_*}{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1-\phi_s}{z} \, dz$$

Saatiin siis korjaustermi erilliseksi.

Korjaustermin voisi toki laskea suoraan auki,

mutta tapana on käyttää seuraavia apumerkintöjä:

Määritellään: $\psi_s(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\,dx$

Joten

$$\psi_s(\xi_2) - \psi_s(\xi_1) = \int_0^{\xi_2} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\,dx - \int_0^{\xi_1} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\,dx$$

$$= \int_0^{\xi_2} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\,dx + \int_{\xi_1}^{0} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\,dx$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\,dx$$

Muokataan vähän korjaustermiä:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1-\phi(\zeta)}{z}\, dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1-\phi_s\left(\frac{z}{L}\right)}{z}\, dz$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Tehdään muuttujanvaihto } \zeta = \frac{z}{L}, \text{ eli} \\ z = \zeta L \text{ ja } \frac{dz}{d\zeta} = L, \text{ eli } dz = L\, d\zeta \end{array}\right]$$

$$= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{1-\phi_s(\zeta)}{\zeta L}\, L\, d\zeta = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{1-\phi_s(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$$

3 kalvoa aikaisemmin meillä oli:

$$s(z_2) - s(z_1) = \frac{s_*}{k} \ln \frac{z_2}{z_1} - \frac{s_*}{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1 - \phi_s(\zeta)}{z} \, dz$$

$$= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{1 - \phi_s(\zeta)}{\zeta} \, d\zeta = \psi_s(\zeta_2) - \psi_s(\zeta_1)$$

Eli saadaan:

$$s(z_2) - s(z_1) = \frac{s_*}{k} \left(\ln \frac{z_2}{z_1} - \psi_s(\zeta_2) + \psi_s(\zeta_1) \right)$$

(Meni 7 kalvoa, prujussa 1 rivi)

Korjausfunktio $\psi_s(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\, dx$ (muistutukseksi)

Stabiilissa tilanteessa

$$\phi_m(\zeta) = \phi_h(\zeta) = 1 + 5\zeta$$

Joten

$$\psi_m(\zeta) = \psi_h(\zeta) = -5\zeta$$

$$\psi_s(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{1-\phi_s(x)}{x}\, dx \qquad \text{(muistutukseksi)}$$

Epästabiilissa:

$$\phi_m(\zeta) = (1-16\zeta)^{-1/4}$$

$$\psi_m(\zeta) = 2\ln\frac{1+X}{2} + \ln\frac{1+X^2}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} X$$

missä $X = \frac{1}{\phi_m} = (1-16\zeta)^{1/4}$

$$\phi_h(\zeta) = (1-16\zeta)^{-1/2}$$

$$\psi_h(\zeta) = 2\ln\frac{1+Y}{2} \quad \text{missä } Y = \frac{1}{\phi_h} = (1-16\zeta)^{1/2}$$

Kaikkiaan ollaan saatu:

$$u(z_2) - u(z_1) = \frac{u_*}{k}\left(\ln\frac{z_2}{z_1} - \psi_m\left(\frac{z_2}{L}\right) + \psi_m\left(\frac{z_1}{L}\right)\right)$$

$$\theta(z_2) - \theta(z_1) = \frac{T_*}{k}\left(\ln\frac{z_2}{z_1} - \psi_h\left(\frac{z_2}{L}\right) + \psi_h\left(\frac{z_1}{L}\right)\right)$$

$$q(z_2) - q(z_1) = \frac{q_*}{k}\left(\ln\frac{z_2}{z_1} - \psi_h\left(\frac{z_2}{L}\right) + \psi_h\left(\frac{z_1}{L}\right)\right)$$

Laitetaan <u>Integrointirajoiksi u:lle:</u>

$z_2 = z$, $z_1 = z_0$ (rosoisuusparametri)

joten $u(z_0) = 0$

integrointirajat θ:lle:

$z_2 = z$, $z_1 = z_{0h}$ siten että

$\theta(z_{0h})$ vastaa pintalämpötilaa θ_0

q:lle:

$z_2 = z$, $z_1 = z_{0q}$ siten että

$q(z_{0q})$ vastaa pintakosteutta q_0

Saadaan muotoon:

$$u(z) = \frac{u_*}{k}\left[\ln\frac{z}{z_0} - \psi_m\left(\frac{z}{L}\right) + \psi_m\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]$$

$$\theta(z) - \theta_0 = \frac{T_*}{k}\left[\ln\frac{z}{z_{0h}} - \psi_h\left(\frac{z}{L}\right) + \psi_h\left(\frac{z_{0h}}{L}\right)\right]$$

$$q(z) - q_0 = \frac{q_*}{k}\left[\ln\frac{z}{z_{0q}} - \psi_h\left(\frac{z}{L}\right) + \psi_h\left(\frac{z_{0q}}{L}\right)\right]$$

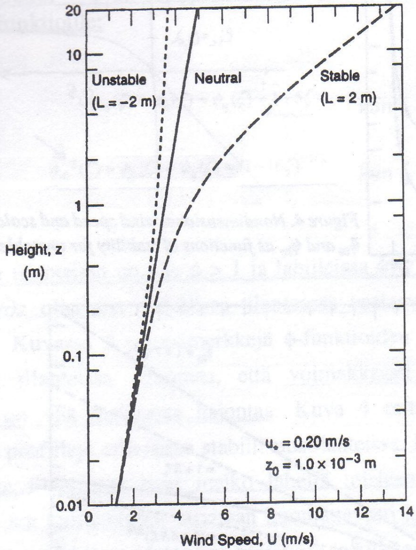


Figure 6. Sample wind speed profiles. Conditions are as labeled. The ψ_m in eq 97 is based on the Businger-Dyer form (eq 79 and Figure 4) for the unstable case and on the Dutch formulation (eq 83 and Figure 5) for the stable case.

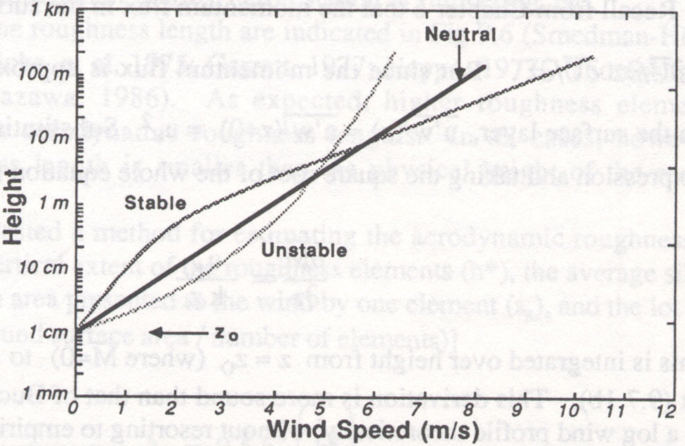


Fig. 9.5 Typical wind speed profiles vs. static stability in the surface layer.

9.7.1 Wind Profile in Statically Neutral Conditions

Tuulelle on 2 eri muotoa:

$$u(z) = \frac{u_*}{k}\left[\ln\frac{z}{z_0} - \psi_m\left(\frac{z}{L}\right) + \psi_m\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]$$

tai:

$$u(z_2) - u(z_1) = \frac{u_*}{k}\left[\ln\frac{z_2}{z_1} - \psi_m\left(\frac{z_2}{L}\right) + \psi_m\left(\frac{z_1}{L}\right)\right]$$

Jälkimmäisessä, ei tarvitse tietää rosoisuutta z_0.

Jos tiedetään $u(z_2)$ ja $u(z_1)$ (ja z_2 ja z_1) ja L, voidaan ratkaista u_*.

Samoin θ:n ja q:n kanssa

$$\theta(z_2) - \theta(z_1) = \frac{T_*}{k}\left[\ln\frac{z_2}{z_1} - \psi_h\left(\frac{z_2}{L}\right) + \psi_h\left(\frac{z_1}{L}\right)\right]$$

$$q(z_2) - q(z_1) = \frac{q_*}{k}\left[\ln\frac{z_2}{z_1} - \psi_h\left(\frac{z_2}{L}\right) + \psi_h\left(\frac{z_1}{L}\right)\right]$$

Jos on mitattu θ ja q kahdelta korkeudesta (z_2 ja z_1) ja jos tiedettäisiin L, voitaisiin ratkaista T_* ja q_*.

Käytännössä voidaan tehdä niin että arvataan

aluksi joku $L^{(1)}$, jos ei muuta keksi niin

$L^{(1)} = \infty$, ja sitä käyttäen ratkaistaan

$u_*^{(1)}$, $T_*^{(1)}$, $q_*^{(1)}$ joista lasketaan uusi $L^{(2)}$,

jonka avulla uudet $u_*^{(2)}$, $T_*^{(2)}$, $q^{(2)}$ jne.

Toivotaan että laskenta konvergoi.

Näin saadaan u_*, T_*, q_* ja L.

Edelleenkään ei tunneta

$$\theta_0,\ z_{0h},\ q_0,\ z_{0q}$$

mutta voidaan sopia että

$$z_{0h} = z_{0q} = z_1$$

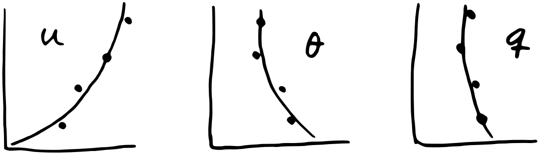
$$\theta_0 = \theta(z_1)$$

$$q_0 = q(z_1)$$

Nyt tiedetään kaikki ja päästään piirtämään θ:in ja q:in pystyprofiilit.

Profiileja piirtäessä pitää ottaa huomioon millä korkeudella z_1 oli. Profiileista voi sitten (jatkamalla niitä z_1:in alapuolelle) katsoa mitä θ ja q ovat lähempänä pintaa.

Samoin tuulelle, jos u_* ja L ja $u(z_2)$ ja $u(z_1)$ tunnetaan, voidaan etsiä z_0 jossa $u(z_0) = 0$.



Jos mittauksia on useammalta kuin 2 eri korkeudelta, pitää sovittaa käyriä dataan.

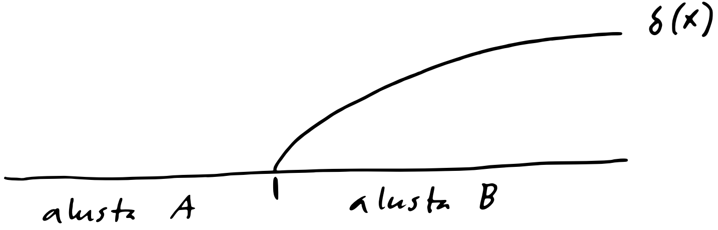
Tuntemattomia ovat u_*, T_*, q_*.

L on niiden funktio.

Oikeastaan kaikki 3 käyrää (tilastollinen malli) pitäisi sovittaa dataan yhtä aikaa.

Sisäinen rajakerros

Kun tuuli puhaltaa alustalta toiselle



Alustat eroavat rosoisuuden, lämpötilan ja/tai kosteuden suhteen.