Hiukan Fourier-analyysistä

(Tai oikeastaan diskreetistä Fourier-muunnoksesta)

Joseph Fourier (1768–1830, Ranska)

keksi ajatuksen että mikä tahansa funktio voidaan esittää siniaaltojen summana.

Nykyään tiedetään että tämä tavallaan pätee, tietyin ehdoin.

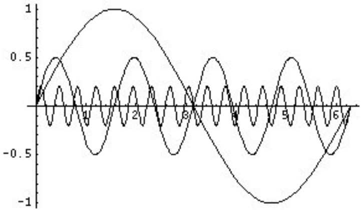
keksi myös kasvihuoneilmiön 1824

In[38]:= `f1[x_] := Sin[x]`

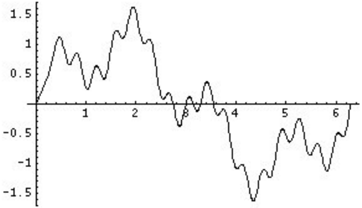
$$f2[x\_] := \frac{1}{2} Sin[4 x]$$

$$f3[x\_] := \frac{1}{5} Sin[17 x]$$

In[41]:= `Plot[{f1[x], f2[x], f3[x]}, {x, 0, 2 Pi}];`



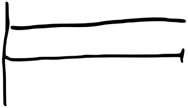
In[42]:= `Plot[f1[x] + f2[x] + f3[x], {x, 0, 2 Pi}];`



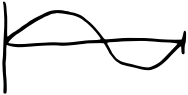
Perusajatus:

Valitaan perusjoukko (kantafunktiojoukko) kuten

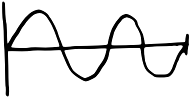
$f_0 =$ vakio



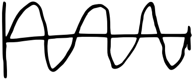
$f_1 = \sin(x)$



$f_2 = \sin(2x)$



$f_3 = \sin(3x)$



jne...

Ja etsitään yhdistelmä

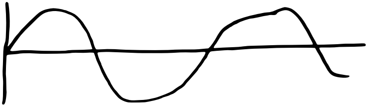
$$f = k_0 f_0 + k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + \dots$$

eli $f(x) = k_0 \cdot \text{vakio} + k_1 \cdot \sin(x) + k_2 \cdot \sin(2x) + k_3 \sin(3x) + \dots$

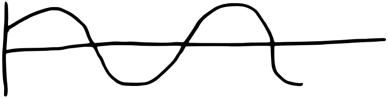
3 muttaa...

Mutta ?

$\sin(nx)$



$\sin(nx+s)$.



Parhaiten kohdefunktioon sopiva siniaalto ei välttämättä ole 0-vaiheessa

Perusjoukko v2

$$f = k_0 + k_1 \sin(x + s_1) + k_2 \sin(2x + s_2) + \ldots$$

Eli tätä kuvaisi joukko lukuja

$$k_0, k_1, k_2, k_3, \ldots$$

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

Osoitetaan että varianssilla on näppärä ominaisuus:

$$f = k_0 + k_1 \sin(x+s_1) + k_2 \sin(2x+s_2) + k_3 \sin(3x+s_3) + \ldots$$

$\bar{f} = k_0$ koska $\overline{\sin(nx)} = 0$

$$\overline{f'^2} = \frac{1}{2}\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \ldots\right)$$

(myöhemmin vakiokertoimet muuttuvat)

koska $\overline{\sin(nx)\sin(nx)} = \frac{1}{2}$

ja $\overline{\sin(nx)\sin(mx)} = 0$ kun $n \neq m$

Tässä on siis taustalla että

$$f' = k_1 \sin(x+s_1) + k_2 \sin(2x+s_2) + k_3 \sin(3x+s_3) + \dots$$

ja $f'f'$ saadaan taulukoimalla tulon termit

	$\sin x$	$\sin 2x$	$\sin 3x$	$\dots$
$\sin x$	$\sin x \sin x$	$\sin x \sin 2x$	$\sin x \sin 3x$	
$\sin 2x$	$\sin 2x \sin x$	$\sin 2x \sin 2x$	$\sin 2x \sin 3x$	
$\sin 3x$	$\sin 3x \sin x$	$\sin 3x \sin 2x$	$\sin 3x \sin 3x$	
$\vdots$				$\ddots$

Muta 2

Historian hämärissä oli työlästä etsiä arvot k ja s muodolle $k\sin(nx+s)$, koska s on sinifunktion sisällä.

Koulusta muistamme:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

joten voidaan mukata

$$\sin(nx+s) = \sin nx \cos s + \sin s \cos nx$$

$$= [\cos s] \sin nx + [\sin s] \cos nx$$

saadaan:

$$k_n \sin(nx+s_n) \Longleftrightarrow g_n \sin nx + h_n \cos nx$$

$$\begin{cases} g_n = k_n \cos s_n \\ h_n = k_n \sin s_n \end{cases}$$

Perusjoukko v3

$$f = h_0 + \begin{matrix} g_1 \sin x \\ h_1 \cos x \end{matrix} + \begin{matrix} g_2 \sin 2x \\ h_2 \sin 2x \end{matrix} + \begin{matrix} g_3 \sin 3x \\ h_3 \cos 3x \end{matrix} + \dots$$

lisäksi vs. aikaisempi muoto, pätee

$$g_n = k_n \cos s_n$$

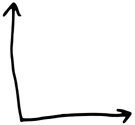
$$h_n = k_n \sin s_n$$

$$k_n^2 = g_n^2 + h_n^2 \qquad \text{koska } (\cos s_n)^2 + (\sin s_n)^2 = 1$$

Tässä muodossa, eli sini-cosini-sarjana, Fourier-kertoimien etsiminen on laskennallisesti helppoa, sillä perusjoukko muodostaa (kaikkien mahdollisten aikasarjojen avaruuteen) ortogonaalisen kannan, joten kertoimet voidaan laskea projisoimalla, eli vektorien (aikasarjojen) sisätuloina.

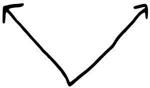
Sama pidemmin selitettynä

2d-avaruus



kantavektorit $\hat{e}_1 = (1, 0)$

$\hat{e}_2 = (0, 1)$

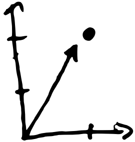


koordinaatioston kierto $45°$

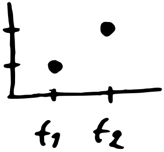
uudet kantavektorit $\hat{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\hat{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Jos meillä on $f = (1, 2)$ ekana tulee mieleen ajatella sitä vektorina 2d-avaruudessa



mutta voi ajatella myös aikasarjana



$f = (1, 2)$

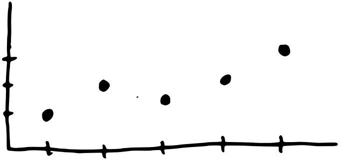
$$f = 1\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 \quad \text{jos} \begin{cases} \hat{e}_1 = (1, 0) \\ \hat{e}_2 = (0, 1) \end{cases}$$

$$f = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\hat{e}_2 \quad \text{jos} \begin{cases} \hat{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \hat{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Ei ole pakko elää $(1,0), (0,1)$ – kannassa.

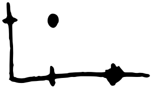
Tietysti korkeampiulotteista tää olisi helpompi ajatella aikasarjana

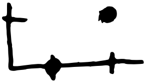
$$f = (1, 2, 1.5, 2, 3)$$

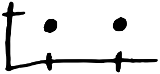


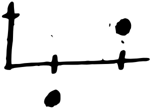
... ja hankalampi piirtää vektorina

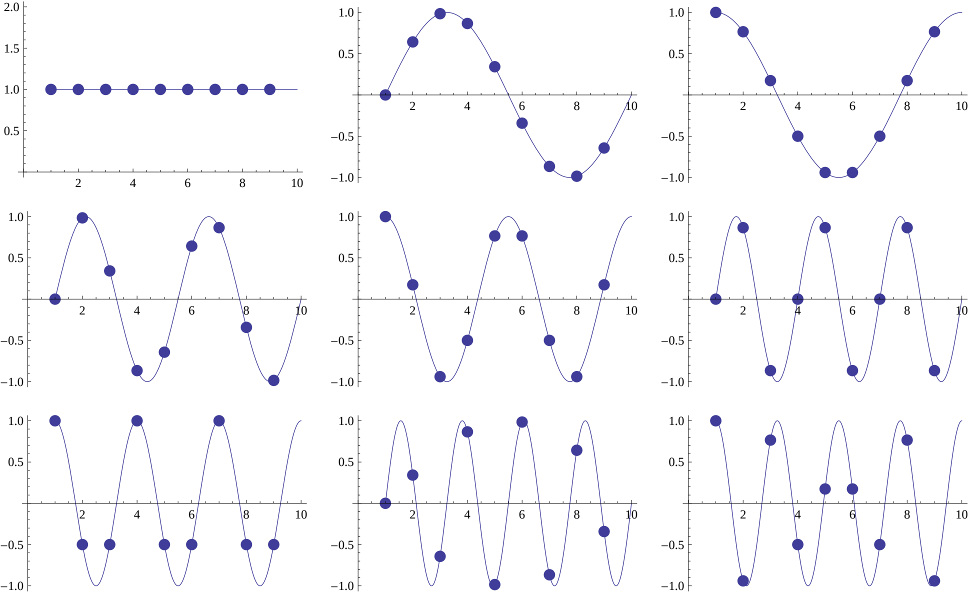
Kantavektorithin voidaan piirtää aikasarjoina

$(1, 0)$ 

$(0, 1)$ 

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 



2.0
1.5
1.0
0.5
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10
1.0
0.5
−0.5
−1.0
2 4 6 8 10

$$f = k_0 \hat{e}_0 + k_1 \hat{e}_1 + k_2 \hat{e}_2 + k_3 \hat{e}_3 + \dots$$

Jotta avaruudella olisi ortonormaali kanta, kantavektoreiden sisätuloille pitäisi päteä

$$\langle \hat{e}_n | \hat{e}_n \rangle = 1$$

$$\langle \hat{e}_n | e_m \rangle = 0 \quad \text{kun} \quad n \neq m$$

Fourier-kertoimet voidaan laskea:

$$k_0 = \langle f \mid \hat{e}_0 \rangle$$

$$k_1 = \langle f \mid \hat{e}_1 \rangle$$

$$\vdots$$

Esim. $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$

$\hat{e}_m = (e_0, e_1, e_2, \ldots e_{n-1})$

$$k_m = \langle f \mid \hat{e}_m \rangle = \sum_{l=0}^{n-1} (\hat{e}_m)_l \, f_l$$

Kyseessä on vain aikasarjan esitys eri koordinaatistoissa.
Koordinaatistosta toiseen vaihdetaan kiertämällä
koordinaatiston kantaa.

5d-esimerkki

$$t = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$$

komponentti $(1,0,0,0,0)$ jne.

Fourier-muunnos $F(t) = (k_0, k_1, k_2, k_3, k_4)$

keskiarvo

sin x, sin 2x, jne komponentit

Käänteismuunnos

Jos tiedetään Fourier-kertoimet $(k_0, k_1, k_2, \ldots)$, miten lasken f:n komponentit?

$$f = k_0 \hat{e}_0 + k_1 \hat{e}_1 + k_2 \hat{e}_2 + \ldots$$

Joten f:n l:s komponentti

$$f_l = (k_0 \hat{e}_0)_l + (k_1 \hat{e}_1)_l + (k_2 \hat{e}_2)_l + \ldots$$

$$= k_0 (\hat{e}_0)_l + k_1 (\hat{e}_1)_l + k_2 (\hat{e}_2)_l + \ldots$$

$$f_l = \sum_{i=0}^{n-1} k_i (\hat{e}_i)_l$$

Mutta 3

sini-cosini-sarjat on helpompi tapa ajatella taajuuksia, mutta oikeasti (diskreetin) Fourier-muunnokset kantafunktiot muodostetaan kompleksilukujen eksponenttifunktiosta.

Eulerin kaava: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Kantavektorijoukko v4 (se oikea)

$l = 0, \dots, n-1$ aikasarjan pituus l, eli l-ulotteinen avaruus

$$(\hat{e}_l)_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-2\pi i \frac{lt}{n}\right)$$

$$f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$$

$t=0$ $t=1$ jne.

f_t tai $f(t)$

(Apumerkintä $K = \frac{2\pi}{n}$) esim. $n = 6$

$$\hat{e}_0(t) \quad e^{0} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, 1, 1, 1, 1) = (\rightarrow, \rightarrow, \dots)$$

$$\hat{e}_1(t) \quad e^{-iKt} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\rightarrow, \nearrow, \nwarrow, \leftarrow, \swarrow, \searrow)$$

$$\hat{e}_2(t) \quad e^{-iK2t} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\rightarrow, \nwarrow, \swarrow, \rightarrow, \nwarrow, \swarrow)$$

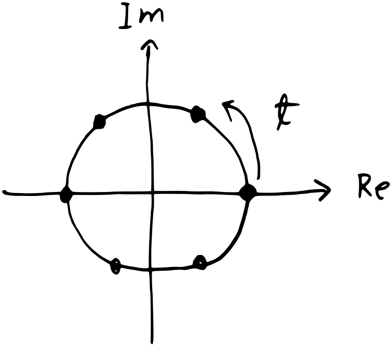
$$\hat{e}_3(t) \quad e^{-iK3t} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\rightarrow, \leftarrow, \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow, \leftarrow)$$

$$\hat{e}_4(t) \quad e^{-iK4t} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\rightarrow, \swarrow, \nwarrow, \rightarrow, \swarrow, \nwarrow)$$

$$\hat{e}_5(t) \quad e^{-iK5t} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\rightarrow, \searrow, \swarrow, \leftarrow, \nwarrow, \nearrow)$$

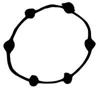
Edellä yritin esittää kompleksisia yksikkövektorita kompleksitasossa yksikköympyrällä "kellotauluna"

$$e^{-it}$$

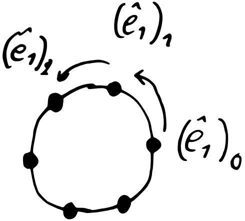


Jos aikasarjan pituus n, askelen pituus $\frac{2\pi}{n}$

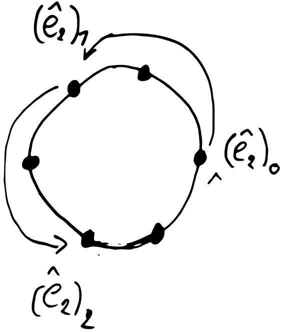
$n = 6$



$\hat{e}_1$

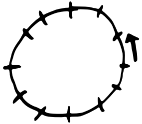
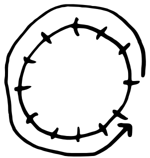


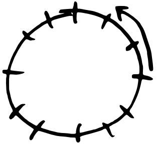
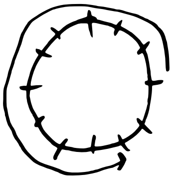
$(\hat{e}_2)$



jne...

$n = 12$

 $\hat{e}_1$ $\hat{e}_{11}$ 

 $\hat{e}_2$ $\hat{e}_{10}$ 

$\hat{e}_\ell$ ja $\hat{e}_{n-\ell}$ sama askel mutta eri suuntaan

Yleensä f:n Fourier-muunnosta merkitään isolla kirjaimella F.

$$F = (F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{n-2}, F_{n-1})$$

Jos f oli reaalinen,

$$F_0 = \bar{f} \text{ tai } \sqrt{n}\,\bar{f} \text{ tai } n\,\bar{f}$$

$$F_\ell = F_{n-\ell}^* \quad \text{(kompleksikonjugaatti)}$$

Normalisoinnista on eri käytäntöjä!

Matemaatikko haluaa pitää kantavektorit yksikkövektoreina

$\hat{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ jolta $\langle \hat{e}_0 | e_0 \rangle = 1$

tällöin, jos $f = (1,1,1)$

$F_0 = \sqrt{3} \approx 1.73$

Matemaatikon määrittelemät kantavektorit olivat muotoa $\frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-2\pi i \frac{lt}{n}\right)$.

Insinööri tykkää jättää $\frac{1}{\sqrt{n}}$:in pois kantavektorien määritelmästä

$$\hat{e}_0 = (1, 1, 1)$$

tällöin, jos $f = (1, 1, 1)$

$$F_0 = 3$$

[Insinööri sitten käyttää $\frac{1}{n}$-normalisoituja kantavektoreita käänteismuunnoksessa]

Meteorologi haluaisi että

$$F_0 = \overline{f}$$

eli että kantavektorit olisikin normalisoitu

$\frac{1}{n}$:llä (eikä matematiikon $\frac{1}{\sqrt{n}}$:llä eikä insinöörin 1:llä)

tällöin, jos $f = (1,1,1)$

$$F_0 = 1$$

Kannattaa kokeilla käyttämällään ohjelmalla.

Mathematica: Fourier[{1, 1, 1}]

{1.73, 0, 0}   ($\sqrt{3} \approx 1{,}73$)

Matlab: fft([1 1 1])

3 0 0

octave: kuin matlab

Python:

```
from scipy import *
fft([1, 1, 1])
3 0 0
```

Insinööriohjelmien fourier-muunnoksen tulos pitää jakaa n:llä jatkoa varten.

No joka tapauksessa, saadaan siis

$$F_0 = a_0$$

$$F_1 = a_1 - i b_1 \qquad F_{n-1} = a_1 + i b_1$$

$$F_2 = a_2 - i b_2 \qquad F_{n-2} = a_2 + i b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

+ jos n oli parillinen, on

$$F_{n/2} = a_{n/2} - i b_{n/2}$$

ilman vastinparia

Nyt F_0 on signaalin (aikasarja) keskiarvo,

ja F_1 ja F_{n-1} sisältävät tiedon

signaalin aaltoluvusta/taajuudesta 1,

F_2 ja F_{n-2} taajuudesta 2, jne.

Jos n oli parillinen, $F_{n/2}$ on ilman vastinparia

$\underline{n=5}$

F_0

$F_1 \quad F_4$

$F_2 \quad F_3$

$\underline{n=6}$

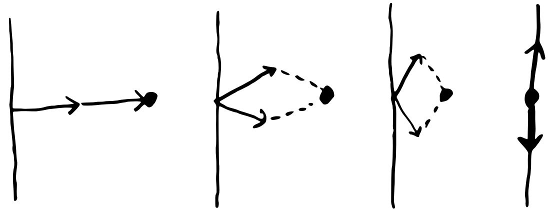
F_0

$F_1 \quad F_5$

$F_2 \quad F_4$

F_3

Signaali f oli reaalinen. Vaikka yksittäiset Fourier-komponentit voivat olla kompleksisia, niin kun F_l ja F_{n-l} pyörivät vastakkaisiin suuntiin, ne muodostavat yhdessä signaalin sen osan (reaalinen) joka on taajuudella l



$F_l + F_{n-l}$ tai siis $\hat{e}_l + \hat{e}_{n-l}$

Signaalin eri taajuuskomponenttien amplitudit saadaan

$$A_0 = F_0$$

$$A_1 = |F_1| + |F_{n-1}| = 2|F_1|$$

$$\vdots$$

$$A_l = |F_l| + |F_{n-l}| = 2|F_l|$$

Paitsi $A_{n/2} = |F_{n/2}|$ jos n parillinen

Ajatellaan hetkellisiä pystytuulen w mittauksia.

Menee ehkä hieman hankalaksi, mutta siis

$F_0 = \overline{w}$

$2|F_1|$ = w:n amplitudi taajuudella 1

$2|F_2|$ = w:n amplitudi taajuudella 2

(ja mahdollisesti $|F_{n/2}|$ taajuudella $n/2$)

W:in komponentti taajuudella ℓ on siis

siniaalto jonka amplitudi on $2|F_\ell|$.

Koska 1-amplitudisen siniaallon varianssi

on $\frac{1}{2}$, niin W:in varianssi taajuudella

ℓ on $\frac{1}{2}\left(2|F_\ell|\right)^2 = 2|F_\ell|^2$

Saadaan siis varianssit $\overline{w'w'}$ eri taajuuksilla

$$\overline{w'w'}(1) = 2|F_1|^2$$

$$\overline{w'w'}(2) = 2|F_2|^2$$

$$\vdots$$

$$\overline{w'w'}(l) = 2|F_l|^2$$

ja mahdollisesti $\overline{w'w'}(n/2) = |F_{n/2}|^2$

jos n parillinen

Meteorologia kiinnostaa varianssin jakautuminen eri taajuuksille.

Varsinkin kun varianssin eri taajuuksilla voi rinnastaa ko. taajuutta vastaavan kokoisten pyörteiden energiaan.

Tätä kutsutaankin energiaspektriksi.