58093 Merkkijonomenetelmät (6 op), kevät 2007

Juha Kärkkäinen[1]

18. tammikuuta 2007

[1]Perustuu Jorma Tarhion, Esko Ukkosen, Tibor Hegedüksen ja Veli Mäkisen aiempiin muistiinpanoihin.

Yleistä kurssista

- Kurssi on valinnainen laudatur-kurssi, joka soveltuu erityisesti *algoritmien erikoistumislinjan* sekä *bioinformatiikan ja laskennallisen biologian suuntautumisvaihtoehdon* opiskelijoille.
  - Soveltuu algoritmien erikoistumislinjan pakolliseksi syventäväksi kurssiksi. Laajuus on supistunut 8 op:stä 6 op:een, mutta "puuttuvat" 2 op:tä voi korvata valinnaisilla linjakohtaisilla kursseilla.
- Esitiedoiksi oletetaan kurssien *Tietorakenteet* sekä *Laskennan mallit* (tai sen edeltäjän *Ohjelmoinnin ja laskennan perusmallit*) tiedot.
  Lisäksi hyödyllisiä ovat kurssit *Laskennan vaativuus* (tai sen edeltäjä *Laskennan teoria*) sekä *Algoritmien suunnittelu (ja analyysi)*.
- Luennot: Juha Kärkkäinen | 16.01.-22.02. | ti 12-14 C222, to 14-16 B222
- Harjoitukset: Jarkko Toivonen | 26.01.-23.02. | pe 10-12 CK107
- Kurssiin kuuluu ohjelmointiprojekti, jossa toteutetaan kurssin aihepiiriin kuuluva algoritmi ja testataan sitä sopivalla syöteaineistolla. Tulokset raportoidaan postereina.
  - Aiheiden valinta: 06.02.
  - Projektisuunnitelman palautus: 23.02.
  - Posteriesittely: 17.04.?? (periodin IV 5. viikko)
- Kurssin suorittaminen: laskuharjoitukset (10 p.) + ohjelmointiprojekti (20 p.) + koe (30 p.) = 60 p.
- Harjoitustehtävistä on merkittävä vähintään 20%. Maksimipisteet 10 pistettä saa merkitsemällä noin 80% harjoitustehtävistä.
- Ohjelmointiprojekti vaaditaan myös erilliskokeeseen osallistuvilta.

- Kurssimateriaali perustuu aikaisempiin J. Tarhion, E. Ukkosen, T. Hegedüksen ja V. Mäkisen laatimiin muistiinpanoihin sekä kirjallisuusluetteloissa mainittuihin kirjoihin. Suuri osa luennoitavista asioista löytyy kirjasta

  Crochemore & Rytter: *Jewels of Stringology*.
  World Scientific, 2003.

Johdanto

- Merkkijono (engl. string) on yksinkertaisimpia, luonnollisimpia ja yleisimpiä tiedon talletusmuotoja
  - luonnollinen kieli, teksti
  - mikä tahansa tiedosto
  - DNA- ja proteiinisekvenssit
  - musiikki
- Merkkijonomenetelmät (stringologia, engl. stringology, string matching) on algoritmitutkimuksen erikoisala, jonka tutkii merkkijonoihin liittyviä algoritmeja ja tietorakenteita:
  - merkkijonohahmon etsintä tekstistä
  - merkkijonojen talletusrakenteet, indeksointi
  - säännönmukaisuuksien etsintä tekstistä
  - (tekstin tiivistäminen)
- Esimerkkiongelmia
  - Hahmonsovitus: Esiintyykö `ab` jonossa `cbbbbacbbbabcc`? Entä `a*b*a`, missä `*` on *jokerimerkki*, eli sen tilalla voi olla mikä tahansa merkki?
  - Muodosta hahmonsovitusautomaatti, loppuosa-automaatti, osajonoautomaatti.
  - Etsi/laske pisin toistuva osajono, erilaisten osajonojen määrä, aakkosjärjestyksessä ensimmäinen loppuosa, kahden merkkijonon editointietäisyys.
  - Etsi merkkijonojoukon pisin yhteinen osajono, lyhin yhteinen ylijono (superstring), pisin yhteinen alijono (subsequence)

- Sovellusalueita
  - tiedon haku sisällön perusteella
  - tekstitietokannat
  - luonnollisen kielen analyysi
  - biotekniikan tietojenkäsittely
  - DNA-sekvensointi, Human Genome Project
  - query-by-humming: hyräillyn melodian haku musiikkitietokannasta
  - kuvankäsittely, hahmontunnistus
- Tyypillisiä piirteitä
  - ongelman koko usein hyvin suuri ($|\text{Human Genome}|=3\cdot 10^9$) ==> tarvitaan nopeita algoritmeja
  - algoritmit usein hyvin lyhyitä, suunnittelu vaatii pikkutarkkuutta
  - tekniikoita: äärelliset automaatit, puut, triet, dynaaminen ohjelmointi, hajautus, bittirinnakkaisuus
- Kurssin sisällöstä.
  - Kurssilla käsitellään keskeisimpiä alan tuloksia. Useimmat algoritmit on kuvattu myös alan oppikirjoissa.
  - Esitetään historiallisesti merkittävät algoritmit.
  - Esitetään laaja kirjo erilaisia tekniikoita.
  - Pyritään esittämään mahdollisimman tehokkaita algoritmeja.
  - Painopiste (aikavaativuuden) pahimman tapauksen analyysissa.

Luku 1

Tarkka hahmonsovitus

Ongelma.

Olkoon $S = S[0, n) = s_0 s_1 \cdots s_{n-1} \in \Sigma^*$ merkkijono (teksti) ja $P = P[0, m) = p_0 p_1 \cdots p_{m-1} \in \Sigma^*$ toinen merkkijono (hahmo) aakkostossa Σ, $|\Sigma| = \sigma$. Sisältääkö S osajononaan P:n, ts. onko S muotoa $S = S'PS''$ jollakin jonoilla S', S''?

Huom. Yleensä sovelluksissa $m \ll n$, ja n voi olla hyvin suuri.

Esim.

S: `karjalainen  karjalainen`
P: `aine  aine`

Triviaaliratkaisu.

Kokeillaan täsmääkö hahmo alkaen
tekstipositiosta 0: onko $s_0 = p_0, s_1 = p_1, \ldots, s_{m-1} = p_{m-1}$?
tekstipositiosta 1: onko $s_1 = p_0, s_2 = p_1, \ldots, s_m = p_{m-1}$?
kunnes löydetään positio, josta alkaen koko hahmo täsmää tai S päättyy.

```
karjal|aine|n
aine  |    |
 aine |    |
  aine|    |
   ain|e   |
    ai|ne  |
     a|ine |
      |aine|
```

Algoritmi 1.0.1

Syöte: $S = s[0 \ldots n)$ teksti, $P = p[0 \ldots m)$ hahmo
Tuloste: P:n ensimmäisen esiintymän alkukohta S:ssä

```
(1)  i := 0; j := 0;
(2)  while i < m and j < n do
(3)      if p[i] = s[j] then
(4)          i := i + 1; j := j + 1;
(5)      else
(6)          j := j − i + 1; i := 0;
(7)  if i = m then output j − m;
```

- Aikavaatimus: verrannollinen merkkivertailujen $p[i] = s[j]$ (rivi 3) kokonaislukumäärään
  1. Pahin tapaus: $P = aaa \cdots ab$ ja $S = aa \cdots a$. Vertailujen lukumäärä ja samalla aikavaatimus on siis $\mathcal{O}(mn)$.
  2. Keskimääräinen käyttäytyminen: jos kaikki merkit ovat yhtä todennäköisiä S:ssä ja P:ssä, voidaan osoittaa, että aikavaatimus on $\mathcal{O}(n)$.
- Tilavaatimus: $\mathcal{O}(1)$
- Toimii kohtalaisen hyvin käytännössä.

1.1 Knuth-Morris-Pratt-algoritmi

D. Knuth, J. Morris & V. Pratt: Fast pattern matching in strings. *SIAM Journal on Computing* 6:323–350, 1977.

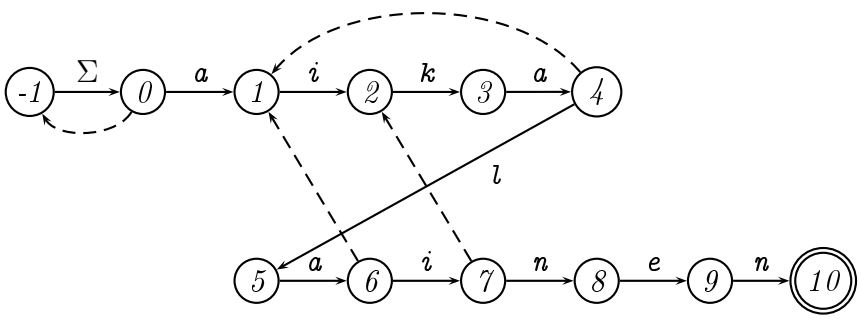
Kehitetään seuraavaksi eräänlainen äärelliseen automaattiin perustuva menetelmä jonka aikavaatimus on $\mathcal{O}(n)$. Idea:

- vertailukohta *ei koskaan* siirry *taaksepäin* tekstissä.
- jos vertailun $s_j = p_i$ tulos on epätäsmäys, tiedetään kuitenkin, että $s_{j-i} = p_0$, $s_{j-i+1} = p_1$, ..., $s_{j-1} = p_{i-1}$. Nyt voidaan hahmoa siirtää oikealle enemmänkin kuin yksi askel, nimittäin suoraan ensimmäiseen sellaiseen kohtaan, että s_j:stä vasemmalle tuleva hahmon osa täsmää.

```
S: aikalaikalainen
P: aikalainen
   .....aikalainen
          5 askeleen siirto
```

- Oletetaan, että $p_0, \ldots, p_{i-1}$ täsmäävät, mutta $p_i \neq s_j$.
- Määrätään jonon $P[0 \ldots i)$ pisin aito alkuosa, joka on myös sen loppuosa; olkoon se $P[0 \ldots k) = P[i-k \ldots i)$.
- Seuraavaksi verrataan $p_k = s_j$ eli hahmoa siirretään $i - k$ askelta oikealle, mutta tekstissä ei edetä.

Esimerkki 1.1.1 *Merkkijonosta* `aikalainen` *muodostettu jononsovitusautomaatti.*



KMP-algoritmin toiminta

- Hahmon P esiprosessointi: lasketaan korjaussiirtymät, jotka esitetään taulukkona $fail[0 \ldots m]$
- Tekstin selaus käyttäen
  - varsinaisia siirtymiä: edetään yksi askel oikealle P:ssä ja S:ssä,
  - korjaussiirtymä: jos varsinainen siirtymä ei onnistu (vertailu $s[j] = p[i]$ epäonnistuu) seurataan korjaussiirtymää $i = fail[i]$ ja verrataan seuraavaksi $s[j] = p[i]$.

Algoritmi 1.1.2 *Knuth-Morris-Pratt*

Syöte: $S = s[0 \ldots n)$ teksti, $P = p[0 \ldots m)$ hahmo
Tuloste: pienin j s.e. $s[j \ldots j + m) = p[1 \ldots m)$, tai jos tällaista j ei ole, n

```
(1)  Initfail; (* korjaussiirtymien laskenta Alg. 1.1.3:llä *)
(2)  i:=0; j:=0;
(3)  repeat
(4)       (* invariantti: p[0...i) = s[j-i...j) *)
(5)       if i = -1 or p[i] = s[j] then
(6)            i := i+1; j := j+1;
(7)       else i := fail[i]
(8)  until i = m or j = n;
(9)  if i = m then return j-m
(10) else return n
```

Korjaussiirtymät

- Taulukko $fail[0 \ldots m]$ vastaa jononsovitus-automaatin korjaussiirtymiä.
- Määritelmä: Jono x on jonon y *alkuosa* (prefix) jos $y = xu$ jollakin jonolla u ja *loppuosa* (suffix) jos $y = vx$ jollakin jonolla v. Alkuosa on *aito*, jos $u \neq \epsilon$ (ϵ tarkoittaa tyhjää jonoa) ja loppuosa on *aito* jos $v \neq \epsilon$.
- $fail$-arvoilla tulee olla seuraava ominaisuus:
  - $fail[i] = k$, kun $P[0 \ldots k)$ on jonon $P[0 \ldots i)$ pisin aito alkuosa, joka on myös sen loppuosa
  - $fail[0] = -1$

Fail-arvojen laskenta

- Määritelmän mukaan $fail[0] = -1$.
- Oletetaan, että $fail[0 \ldots i]$ on laskettu.
  - Olkoon $fail[i] = k$, siis $P[0 \ldots k) = P[i - k \ldots i)$
  - jos $p_i = p_k$ niin $fail[i + 1] = k + 1$, koska $P[0 \ldots k + 1) = P[i - k \ldots k + 1)$
  - jos $p_i \neq p_k$, niin määrätään *pienin* r, jolla $p_i = p_u$ ja $fail^r[i] = u$ (eli $fail[fail[\ldots fail[i]\ldots] = u$), jolloin $fail[i + 1] = u + 1$, tai $fail^r[i] = -1$, jolloin $fail[i + 1] = 0$.

Algoritmi 1.1.3 *Initfail*

Syöte: $P = p[0 \ldots m)$ hahmo
Tuloste: taulukko $fail[0 \ldots m]$ hahmolle P

```
(1)  k := −1; i := 0; fail[0] := −1;
(2)  repeat
(3)       if k = −1 or p[i] = p[k] then
(4)            i := i + 1; k := k + 1; fail[i] := k
(5)       else k := fail[k]
(6)  until i = m
```

Lause 1.1.4 *Algoritmi 1.1.3 vaatii ajan $\mathcal{O}(m)$.*

Todistus. Aikavaatimus on verrannollinen repeat-lauseen ehtolauseen (3-5) suorituskertojen lukumäärään k. Kullakin kerralla suoritetaan joko then-haara (4) tai else-haara (5):

- then-haara
  - kasvattaa aina i:tä yhdellä
  - i ei missään pienene
  - alussa $i = 0$ ja lopussa $i = m$
  - ==> then-haara suoritetaan m kertaa
- else-haara
  - pienentää k:tä aidosti (koska $fail[k] < k$)

  - kasvattaa siten $i-k$:tä
  - $i-k$ ei koskaan pienene
  - alussa $i-k=1$, lopussa $i-k \leq m+1$
  - ==> else-haara suoritetaan korkeintaan m kertaa

- ==> $k \leq 2m = \mathcal{O}(m)$

□

Lause 1.1.5 *Algoritmi 1.1.2 vaatii ajan $\mathcal{O}(m+n)$.*

Todistus. Esiprosessointi (Alg. 1.1.3) vaatii ajan $\mathcal{O}(m)$ (Lause 1.1.4). Tekstin selaus (Algoritmin 1.1.2 rivit 3–7) vaatii ajan $\mathcal{O}(n)$. Tämä osoitetaan kuten Lause 1.1.4. □

1.2 Boyer-Moore-algoritmi

R. Boyer & S. Moore: A fast string searching algorithm. *Communications of the ACM* 20: 762–772, 1977.

Boyer-Moore-algoritmin (alkuperäinen) idea:

- Hahmoa siirretään vasemmalta oikealle (kuten edellä).
- Jokaisessa pysähdyskohdassa merkkivertailut aloitetaan P:n lopusta ja edetään alkuunpäin (siis oikealta vasemmalle).
- Jos vuorossa oleva merkkipari ei täsmää, käytetään jälleen erästä siirtofunktiota, joka siirtää hahmoa $1 \ldots m$ askelta oikealle.
- Algoritmi tutkii parhaassa tapauksessa vain joka m:nnen S:n merkin!

Esimerkki 1.2.1
$P =$ *`at-that`*, $S =$ *`which-finally-halts-at-that-point:`*

```
which-finally-halts---at-that-point
      ?      ?  ?=   ?==
at-that      |  ||   |||          hahmon ensimmäinen kohdistus
       at-that  ||   |||          siirto tähän, koska f ei esiinny P:ssä
           at-that   |||          siirto tähän, koska nyt - täsmää
                 at-that          siirto tähän, koska l ei esiinny P:ssä
                      at-that     siirto tähän, koska nyt at täsmää;
                                  havaitaan, että koko hahmo täsmää.
```

Tarkastellaan tilannetta, jossa verrataan merkkejä p_i ja s_j ja tuloksena on epätäsmäys. Siirron määräämisessä käytetään kahta heuristiikkaa:

1. *Esiintymäheuristiikka:* Konfliktin aiheuttaneen S:n merkin s_j kohdalle tulee siirron jälkeen P:n lopusta lukien ensimmäinen merkki, joka täsmää. Jos P ei sisällä s_j:tä, siirron pituus on m.

2. *Sovitusheuristiikka:* Hahmoa siirretään oikealle, kunnes tutkittu S:n osa $s[j+1 \ldots j+m-i) = p[i+1 \ldots m)$ täsmää P:n kohdalle tulevaan osaan. Lisäksi konfliktin aiheuttaneen S:n merkin s_j kohdalle täytyy siirron jälkeen tulla jokin muu merkki kuin p_i.

Lopullinen siirto on maksimi heuristiikkojen 1 ja 2 antamista siirroista.

Algoritmi 1.2.2 *Boyer-Moore*

Syöte: $S = s[0..n)$ teksti, $P = p[0..m)$ hahmo
Tuloste: P:n ensimmäisen esiintymän alkukohta S:ssä

```
(1)  init; (* taulukkojen δ1 ja δ2 alustus *)
(2)  j := m − 1;
(3)  while j < n do
(4)      i := m − 1;
(5)      while i ≥ 0 and p[i] = s[j] do
(6)          i := i − 1; j := j − 1;
(7)      if i < 0 then return j + 1;
(8)      j := j + max(δ1[s[j]], δ2[i])
```

Rivillä 8 $s[j]$ on konfliktimerkki. Taulukko δ_1 antaa heuristiikan 1 mukaisen lukukohdan siirron:
$\delta_1[a] = \min\{t \mid t = m \text{ tai } a = p[m-1-t])\}$.

```
S : halts---at-that
P :     at-that      p[m − 1 − 4] = - => δ1[s] = 4
          at-that
```

Taulukko δ_2 antaa heuristiikan 2 mukaisen lukukohdan siirron:
$\delta_2[i] = m - 1 - i + \min(\{t \mid t > i \text{ and } P[0 \ldots m-t) = P[t \ldots m)\} \cup$
$\{t \mid 1 \le t \le i \text{ and } P[i+1 \ldots m) = P[i+1-t \ldots m-t) \text{ and } P[i] \neq P[i-t]\})$

```
S : halts---at-that
P :     at-that      t = 5 => δ2[4] = 7 − 1 − 4 + 5 = 7
            at-that
```

- Taulukko δ_1 on helppo laskea. Aikavaatimus: $\mathcal{O}(\sigma + m)$.
- Taulukko δ_2 lasketaan KMP-esiprosessoinnin (Alg. 1.1.3) tapaan. Aikavaatimus: $\mathcal{O}(m)$.
- Taulukoissa δ_1 ja δ_2 on yhteensä $\sigma + m + 1$ alkiota.

BM-algoritmin esiprosessointiaika on $\mathcal{O}(\sigma+m)$. Tekstin selausaika pahimmassa tapauksessa $\mathcal{O}(n)$ ja parhaassa tapauksessa $\mathcal{O}(n/m)$. BM-algoritmin analyysi on varsin mutkikas.

BM-algoritmista on kymmeniä muunnelmia, jotka pyrkivät korjaamaan sen heikkouksia. Tässä joitakin:

- Kaikkien esiintymien löytäminen
  - BM-algoritmi on helppo yleistää etsimään kaikki hahmon esiintymät, mutta selausaika kasvaa $\mathcal{O}(n + rm)$:ään, missä r on löydettyjen esiintymien lukumäärä.
  - Boyer-Moore-Galil -algoritmi (C. ACM 22(9):505–508, 1979) löytää kaikki esiintymät ajassa $\mathcal{O}(n)$.
  - BM-algoritmi hahmoa siirtäessään unohtaa kaiken aiemmista täsmäyksistä.
  - BMG-algoritmi pitää muistissa mahdollisesti jo täsmääväksi tiedetyn hahmon alkuosan pituuden.
- Keskimääräinen aikavaatimus
  - Yao (SIAM J. Comp., 8(3):368–387, 1979) on osoittanut, että alaraja ongelman keskimääräiselle aikavaatimukselle on $\Omega((n/m) \log_\sigma m)$.
  - BM-algoritmi ei pääse tähän, koska se tekee liian lyhyitä siirtymiä.
  - Lecroqin esittämä variaatio (Theoretical Computer Science, 92:119–144, 1992). on optimaalinen keskimääräisessä tapauksessa.
  - Se ei lopeta täsmäystä vielä, kun teksti ei enää täsmää hahmon loppuosaan, vaan vasta, kun teksti ei enää täsmää mihinkään hahmon osajonoon.
- Käytännön suorituskyky
  - Sovitusheuristiikka on keskeinen teoreettiselle analyysille, mutta useimmissa käytännön tilanteissa esiintymäheuristiikka ratkaisee nopeuden.

– Horspool -algoritmi (Software—Practice and Experience, 10:501–506, 1980) käyttää vain esiintymäheuristiikkaa, mutta ei epätäsmäyksen aiheuttaneen merkin perusteella vaan hahmon viimeisen merkin kohdalla olevan tekstin merkin perusteella.

– Ohitussilmukka (skip loop): Etsitään hahmon viimeistä merkkiä nopeassa silmukassa.

1.3 Shift-Or-algoritmi

R. Baeza-Yates & G. Gonnet: A new approach to text searching. *Communications of ACM* 35(10):74–82, 1992.

Olkoon w tietokoneen sananpituus. Oletetaan aluksi, että $|P| = m \leq w$.
Idea:

- Ylläpidetään m-bittistä bittivektoria E, joka esittää haun tilanteen kullakin hetkellä. Bitti $E.i = 0$, jos $p[0 \ldots i]$ täsmää tähän asti luetun tekstin loppuun. Eli, kun tekstistä on luettu $S[0 \ldots j]$, $E.i = 0$, jos $P[0 \ldots i] = S[j - i \ldots j]$, muuten $E.i = 1$.

- Esiintymä on löytynyt, kun bitti $E.(m-1) = 0$.

- Tilannetta päivitetään kussakin tekstin kohdassa käyttämällä kullekin merkille $a \in \Sigma$ laskettuja bittivektoreita $T[a]$, joille pätee bitti $T[a].i = 0$, jos $p[i] = a$, muuten $T[a].i = 1$.

- Päivitys toteutetaan kahdessa vaiheessa:
  (1) E:n bittejä siirretään askel vasemmalle ($E' := E << 1$)
  (2) Suoritetaan bittivektorien E' ja $T[s[i]]$ or-operaatio ($E' \mid\mid T[s[i]]$).

Algoritmi 1.3.1 *Shift-Or*

Syöte: $S, P, m \leq w$
Tuloste: P:n esiintymien loppukohdat

(1) **for** $a \in \Sigma$ **do** $T[a] := 2^m - 1$; (* $T[a] := 111...11$ *)
(2) **for** $i := 0$ **to** $m - 1$ **do** $T[p[i]] := T[p[i]] - 2^i$; (* $T[a].i := 0$ *)
(3) $E := 2^m - 1$;
(4) **for** $j := 0$ **to** $n - 1$ **do**
(5) $E := (E << 1) \mid\mid T[s[j]]$;
(6) **if** $E.(m-1) = 0$ **then** write j

Esimerkki 1.3.2 *$P =$ assi, $S =$ apassit, bittivektorit pystysuorassa*

apuvektorit

	a	*i*	*p*	*s*	*t*
a	0	1	1	1	1
s	1	1	1	0	1
s	1	1	1	0	1
i	1	0	1	1	1

sovituksen vaiheet

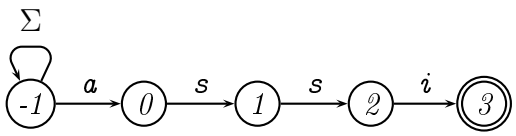
	a	*p*	*a*	*s*	*s*	*i*	*t*
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1

Varaamalla E:lle useita sanoja, voidaan käsitellä pitempiä hahmoja. Algoritmin ominaisuuksia:

- Selauksen (rivit 4-6) aikavaatimus: $O(\lceil m/w \rceil n)$.
- Alustuksen (rivit 1-2) aikavaatimus: $O(\lceil m/w \rceil \sigma + m)$.
- Tilavaatimus: $O(\lceil m/w \rceil \sigma)$.

Shift-or-algoritmin voidaan myös ajatella simuloivan epädeterminististä hahmonsovitusautomaattia (ks. luku 1.7). Bittivektori E on automaatin tilavektori:
Kun $S[0 \ldots j]$ on selattu, $E.i = 0$ joss automaatissa on polku, joka johtaa tilaan i syötteellä $S[0 \ldots j]$.

Esimerkki 1.3.3 *Hahmon assi epädeterminististen hahmonsovitusautomaatti.*



1.4 Karp-Rabin -algoritmi

R. Karp & M. Rabin: Efficient randomized pattern-matching algorithms. *IBM Journal of Research and Development* 31:249–260, 1987.

Idea

Käytetään hajautusfunktiota H: jonot $\rightarrow$ kokonaisluvut. Lasketaan $H(P)$ ja tutkitaan jokaisella $j = 0, \ldots, n-m$, onko $H(P) = H(S[j \ldots j+m))$.

Jos $H(P) \neq H(s[j \ldots j+m))$, P ei voi täsmätä $S[j \ldots j+m)$:n kanssa. Muuten tarkastetaan, onko todella $P = S[j \ldots j+m)$. Koska H sallii yhteentörmäykset (H ei ole injektio), saattaa olla $P \neq S[j \ldots j+m-1]$.

Karp ja Rabin (1987) käyttävät funktiota H, jolla on ominaisuudet:

- Yhteentörmäykset ovat harvinaisia.
- Merkitään $S^j = s[j \ldots j+m)$ ja $S^{j+1} = s[j+1 \ldots j+m+1)$: $H(S^{j+1})$ on laskettavissa nopeasti arvosta $H(S^j)$ ja merkistä $S[j+m]$.

Hajautusfunktion H määrittely

- Tulkitaan aakkoston Σ merkit numeroina $0, 1, \ldots, \sigma - 1$.
- Merkkijono $A = a_0 \cdots a_{k-1}$ esittää σ-järjestelmän kokonaislukua $v(A) = a_0\sigma^{k-1} + a_1\sigma^{k-2} + \cdots + a_{k-1}\sigma + a_{k-1}$.
- v toteuttaa ehdot:
  - ei yhteentörmäyksiä
  - $v(S^{j+1}) = (v(S^j) - s[j] \cdot \sigma^{m-1}) \cdot \sigma + s[j+m]$.
- $v(A)$ voi olla kuitenkin liian suuri luku tehokkaasti käsiteltäväksi.
- H:n arvoalueeksi valitaan $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ missä q on alkuluku.
- Asetetaan $H(A) = H_q(A) = v(A)\ mod\ q$. (*mod* on jakojäännös, esim. $6\ mod\ 3 = 0$, $7\ mod\ 3 = 1$, $8\ mod\ 3 = 2$, $9\ mod\ 3 = 0$.)

– *mod*-aritmetiikassa
$(a + b)\ mod\ q = (a\ mod\ q + b\ mod\ q)\ mod\ q$
$(a \cdot b)\ mod\ q = ((a\ mod\ q) \cdot (b\ mod\ q))\ mod\ q$

– siten

$$\begin{aligned} H_q(S^j) &= v(S^{j+1})\ mod\ q \\ &= ((v(S^j)\ mod\ q - s[j] \cdot \sigma^{m-1}\ mod\ q) \cdot \sigma\ mod\ q + \\ &\quad s[j+m])\ mod\ q \\ &= (H_q(S^j) - s[j] \cdot \sigma^{m-1}) \cdot \sigma + s[j+m], \end{aligned}$$

missä kaikki aritmeettiset operaatiot suoritetaan mod q -aritmetiikassa.

– Siis $H_q(S^{j+1})$ saadaan lasketuksi $H_q(S^j)$:stä 4:llä mod q -aritmetiikan operaatiolla. Tämä vie vakioajan, jos q on valittu niin, että kukin välitulos mahtuu yhteen sanaan.

Algoritmi 1.4.1 *Karp-Rabin*

Syöte: $S = s[1 \ldots n]$ teksti, $P = p[1 \ldots m]$ hahmo
Tuloste: kaikkien P:n esiintymien alkukohdat S:ssä
(1) $\sigma := 32$;
(2) $q := 4194301$; (* suurin alkuluku $< 2^{32}/\sigma^2$ *)
(3) cm $:= \sigma^{m-1}\ mod\ q$;
(4) $hp := 0; hs := 0$;
(5) **for** $i := 0$ **to** $m - 1$ **do** $hp := (hp \cdot \sigma + p[i])\ mod\ q$; (* $hp = H(P)$ *)
(6) **for** $j := 0$ **to** $m - 1$ **do** $hs := (hs \cdot \sigma + s[j])\ mod\ q$; (* $hs = H(S^0)$ *)
(7) **for** $j := 0$ to $n - m - 1$ **do**
(8) **if** $hp = hs$ **then if** $P = S[j \ldots j + m)$ **then** write i;
(9) $hs := ((hs - s[j] \cdot \text{cm}) \cdot \sigma + s[j + m])\ mod\ q$;
(10) **if** $hp = hs$ **then if** $P = S[n - m \ldots n)$ **then** write $n - m$;

Huomautuksia Algoritmista 1.4.1:

- Algoritmi toimii vakiotilassa.
- Jotta algoritmi toimisi nopeasti, on edullista, jos kukin H:n arvo ja välitulokset mahtuvat yhteen sanaan. Jos sanan pituus on 32 bittiä, kannattaa valita q:ksi suurin alkuluku $< 2^{32}/\sigma^2$.
- Aakkoston kokona kannattaa käyttää 2:n potenssia, jolloin σ:lla kertomiset voidaan toteuttaa sivuttaissiirtoina (shift).

- Rivin 9 lauseke $hs - s[j] \cdot \text{cm}$ pitää kirjoittaa jossain toteutusympäristöissä termillä $(\sigma-1)\cdot q$ lisättynä eli muodossa $hs+(\sigma-1)\cdot q-s[j]\cdot \text{cm}$, jotta *mod* otettaisiin varmasti positiivisesta arvosta.

- Vertailuissa $P = S^0$ ja $P = S^j$ riveillä 8 ja 10 vertaillaan m-merkkisiä jonoja. Ne toteutetaan esim. triviaalialgoritmilla.

Sanomme

- Väärä täsmäys (false match): $H(P) = H(S^j)$, mutta $P \neq S^j$.

- Oikea täsmäys (true match): $H(P) = H(S^j)$ ja $P = S^j$.

Algoritmin 1.4.1 aikavaatimus on selvästi muotoa $\mathcal{O}(m + n + fm + hm)$, missä f on väärien ja h oikeiden täsmäysten lukumäärä. Pahimmassa tapauksessa tämä on $\mathcal{O}(mn)$. Keskimääräisessä tapauksessa (tietyin oletuksin) f ja h ovat pieniä, joten keskimääräisessä tapauksessa aikavaatimus on $\mathcal{O}(m+n)$.

Karp ja Rabin tarkastelevat myös universaaliin hajautukseen perustuvia versioita algoritmista:

- Valitaan q *satunnaisesti* lukujoukosta Q.

- Q:n luvut voivat olla pieniäkin, eikä niiden tarvitse olla kokonaislukuja.

- Väärän täsmäyksen todennäköisyys on erittäin pieni syötteestä riippumatta (universaalius).

- q voidaan myös vaihtaa aina väärän täsmäyksen sattuessa.