1.5 Aho-Corasick-algoritmi

A. Aho & M. Corasick. Efficient string matching: An aid to bibliographic search. *Communications of the ACM* 18(6): 333–340, 1975.

- KMP-algoritmin yleistys usealle hahmolle.
- On annettu teksti S, $|S| = n$, ja joukko hahmoja $\mathbb{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$. Merkitään $|\mathbb{P}| = m = \sum_{i=1}^{k} |P_i|$.
- On etsittävä S:stä kaikkien $P_i \in \mathbb{P}$ kaikki esiintymät.

Ratkaisuja

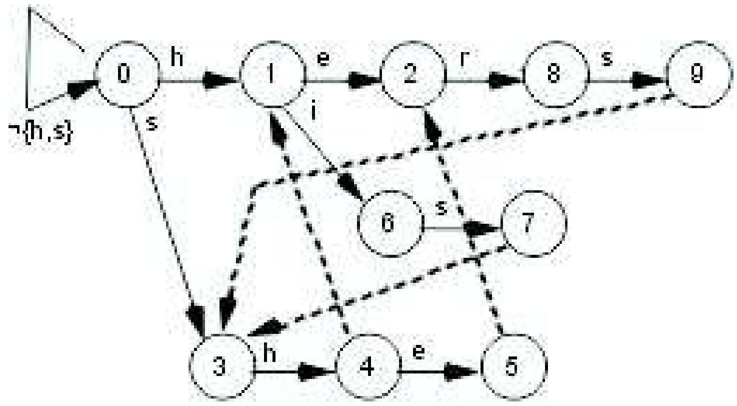
1. Sovelletaan esim. KMP-algoritmia vuorotellen kullakin hahmolla P_i. Aikavaatimus pahimmassa tapauksessa $\mathcal{O}(m + kn)$.
2. Aho-Corasick-algoritmi. Teksti S selataan vain kerran. Aikavaatimus on pahimmassa tapauksessa $\mathcal{O}(m + n)$ (tietyin edellytyksin).
3. Myös BM-algoritmille ja sen variaatioille on vastaavia yleistyksiä.

Aho-Corasick

Muodostetaan $\mathbb{P}$:lle jononsovitus-automaatti $M_{\mathbb{P}}$. $M_{\mathbb{P}}$:n osat:

- Varsinaiset siirtymät: $goto[j, a]$ — tilasta j siirrytään merkillä a tilaan $goto[j, a]$. Jos tilasta j ei ole siirtymää a:lla, $goto[j, a] = \perp$.
- Korjaussiirtymät: $fail[j]$ — jos $goto[j, a] = \perp$ vuorossa olevalla tekstimerkillä a (ts. mikään varsinainen siirtymä ei sovi), siirrytään tilaan $fail[j]$.
- Tulostusfunktio: $output[j]$ — sisältää hahmot, jotka tulostetaan, kun tullaan tilaan j (ts. näiden hahmojen esiintymät on nyt löydetty).

Esimerkki 1.5.1 *Aho-Corasick jononsovitus-automaatti $M_{\mathbb{P}}$ hahmojoukolle* $\mathbb{P} = \{\texttt{he, she, his, hers}\}$.



Varsinaiset siirtymät muodostavat $\mathbb{P}$:stä ns. trie-rakenteen. Varsinainen siirtymä (nuoli yhtenäisellä viivalla) lukee tekstistä yhden merkin, esim. $goto[1, i] = 6$. Korjaussiirtymää (nuoli katkoviivalla) seurataan, jos varsinainen ei sovi, esim. $fail[9] = 3$; jokaisesta tilasta ($\neq 0$) lähtee korjaussiirtymä (alkutilaan 0 johtavat korjaussiirtymät on jätetty merkitsemättä).

Tulostusfunktio:

j	$output[j]$
2	$\{\texttt{he}\}$
5	$\{\texttt{she, he}\}$
7	$\{\texttt{his}\}$
9	$\{\texttt{hers}\}$

Seuraava algoritmi esittää $M_{\mathbb{P}}$:n toiminnan, kun se selaa S:n:

Algoritmi 1.5.2 *Aho-Corasick-selaus*

Syöte: S ja $M_{\mathbb{P}}$ (=funktiot *goto*, $fail$ ja *output* hahmojoukolle $\mathbb{P}$)
Tuloste: Kaikki $\mathbb{P}$:n hahmojen esiintymät (= esiintymien loppukohdat) S:ssä

$state := 0$
for $j := 0$ **to** $n - 1$ **do**
  while $goto[state, S[j]] = \bot$ **do** $state := fail[state]$
  $state := goto[state, S[j]]$
  if $output[state] \neq \emptyset$ **then** $print(j, output[state])$

Goto-funktion konstruktio

Lisätään hahmot P_i yksitellen trie-rakenteeseen, joka esittää *goto*-funktiota. Kun P_i on lisätty, päivitetään samalla *output*-funktiota. (*fail*-funktion konstruktio täydentää *output*-funktion).

Algoritmi 1.5.3 *Aho-Corasick-esiprosessointi I*

Syöte: $\mathbb{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$
Tuloste: *goto*-funktio ja osittain laskettu *output*-funktio
Oletukset: $output(s)$ on aluksi tyhjä, kun tila s syntyy;
$goto[s, a] = \perp$, jos $goto[s, a]$ on määrittelemättä
tai ko. siirtymä ei lainkaan kuulu $M_{\mathbb{P}}$:hen.

$newstate := 0$
for $i := 1$ **to** k **do**
  $state := 0; j := 0$
  while $goto[state, P_i[j]] \neq \perp$ **do**
    $state := goto[state, P_i[j]]$
    $j := j + 1$
  for $h := j$ **to** $|P_i| - 1$ **do**
    $newstate := newstate + 1$
    $goto[state, P_i[h]] := newstate$
    $state := newstate$
  $output[state] := \{P_i\}$
for $a \in \Sigma$ **do if** $goto[0, a] = \perp$ **then** $goto[0, a] := 0$

Fail-funktion konstruktio

Laskenta etenee tasoittain alkaen *goto*-trien juuresta. Tasolla d tilojen $fail$-funktion laskemiseksi käydään tason $d - 1$ tilat r läpi seuraavasti:

1. Jokaisella a siten, että $goto[r, a] = s$, $s \neq \perp$:
   a) $state := fail[r]$
   b) Toista $state := fail[state]$ kunnes saavutetaan $state$, jolla $goto[state, a] \neq \perp$. (Sellainen löytyy aina, koska $goto[0, a] \neq \perp$.)
   c) Aseta $fail[s] := goto[state, a]$

Algoritmi 1.5.4 *Aho-Corasick-esiprosessointi II*

Syöte: *goto*-funktio ja alustava *output*-funktio Algoritmista 1.5.3
Tuloste: *fail*-funktio ja lopullinen *output*-funktio

```
queue := ∅
for a ∈ Σ do if goto[0, a] ≠ 0 then
    s := goto[0, a]
    push_back(queue, s)
    fail[s] := 0
while queue ≠ ∅ do
    r := pop_front(queue)
    for a ∈ Σ do if goto[r, a] ≠ ⊥ then
        s := goto[r, a]
        push_back(queue, s)
        state := fail[r]
        while goto[state, a] = ⊥ do state := fail[state]
        fail[s] := goto[state, a]
        output[s] := output[s] ∪ output[fail[s]]
```

AC-algoritmin oikeellisuus

Jos tilasta 0 tilaan s johtava *goto*-reitti selaa jonon u, kutsutaan u:ta s-jonoksi. Kaikkien s-jonojen, $s \in M_{\mathbb{P}}$, joukkoa kutsutaan $M_{\mathbb{P}}$-jonoiksi. Jono u on $M_{\mathbb{P}}$-jono, joss se on jonkin hahmon $P_i \in \mathbb{P}$ alkuosa.

Lemma 1.5.5 *Oletetaan, että jono u on s-jono ja v on t-jono automaatissa $M_{\mathbb{P}}$. Silloin $fail[s] = t$, jos ja vain jos v on u:n pisin aito loppuosa, joka on $M_{\mathbb{P}}$-jono.*

Todistus. Käytetään induktiota $|u|$:n (s:n syvyyden) suhteen.

- Kun $|u| = 1$, Alg. 1.5.4 asettaa $fail[s] := 0$. Koska 0-jono on tyhjä jono, joka on u:n ainoa aito loppuosa, väite pätee.

- Oletetaan, että $|u| = j + 1$, $j > 0$, ja että väite on tosi kaikille tiloille, joiden syvyys on enintään j. Olkoon $u[0 \dots j)$ r_0-jono, eli $goto[r_0, u[j]] = s$. Olkoot $r_1, \dots, r_p$ tiloja siten, että

    1. $r_{i+1} = fail[r_i]$, $0 \leq i < p$,
    2. $goto[r_i, u[j]] = \perp$, $1 \leq i < p$, ja

3. $goto[r_p, u[j]] = t \neq \perp$.

- Siis $r_1, \ldots, r_p$ ovat ne tilat "state", joiden kautta Alg. 1.5.4:n sisin silmukka kulkee. Sen jälkeen algoritmi asettaa: $fail[s] := t$.

- Olkoon v_i r_i-jono, $0 \leq i \leq p$. Induktio-oletuksesta seuraa, että v_1 on $v_0 = u[0 \ldots j)$:n pisin aito loppuosa, joka on $M_{\mathbb{P}}$-jono. Vastaavasti v_2 on v_1:n pisin aito loppuosa, joka on $M_{\mathbb{P}}$-jono, jne.

- v_0:n jokainen aito loppuosa on myös v_1:n loppuosa. Siten v_2:n täytyy olla v_0:n toiseksi pisin aito loppuosa, joka on $M_{\mathbb{P}}$-jono. Vastaavasti v_3 on v_0:n kolmanneksi pisin aito loppuosa, joka on $M_{\mathbb{P}}$-jono, jne.

- Siten v_p on v_0:n pisin aito loppuosa, jolla $v_p u[j] = v$ on $M_{\mathbb{P}}$-jono.

- Siis v on u:n pisin aito loppuosa, joka on $M_{\mathbb{P}}$-jono.

$\square$

Lemma 1.5.6 *Tulosjoukko $output[s]$ sisältää jonon y, jos ja vain jos y on jokin $\mathbb{P}$:n hahmo, joka on s-jonon loppuosa.*

Todistus. Kuten Lemma 1.5.5. $\square$

Lemma 1.5.7 *Kun $M_{\mathbb{P}}$ on selannut (Alg. 1.5.2) $j+1$ merkkiä S:n alusta, se on tilassa s, jos ja vain jos s-jono on $S[0 \ldots j]$:n pisin loppuosa joka on $M_{\mathbb{P}}$-jono.*

Todistus.. Kuten Lemma 1.5.5. $\square$

Lause 1.5.8 *Algoritmi 1.5.2 tulostaa täsmälleen kaikki $\mathbb{P}$:n esiintymät S:stä.*

Todistus. Lemman 1.5.6 perusteella algoritmi ei koskaan tulosta väärää esiintymää. On vielä todistettava, että se tulostaa kaikki esiintymät.

- Olkoon j jonkin P_i:n esiintymän päättymiskohta S:ssä.

- Koska P_i on $S[0 \ldots j]$:n loppuosa ja $M_{\mathbb{P}}$-jono, on algoritmi $S[0 \ldots j]$:n selauksen jälkeen tilassa s, jonka syvyys on vähintään $|P_i|$ (Lemma 1.5.7).

- Siten P_i on s-jonon loppuosa ja algoritmi tulostaa esiintymän (Lemma 1.5.6).

$\square$

AC-algoritmin aikavaatimus

Lause 1.5.9 *Automaatti $M_{\mathbb{P}}$ (Alg. 1.5.2) tekee vähemmän kuin $2n$ tilasiirtymää selatessaan tekstin S, $|S| = n$.*

Todistus. $Fail$-siirtymiä voi olla korkeintaan *goto*-siirtymien määrä -1, koska jokainen $fail$-siirtymä johtaa aidosti lähemmäksi tilaa 0 (eli syvyys vähenee). Koska *goto*-siirtymiä on n kpl, $fail$-siirtymiä voi siis olla korkeintaan $n-1$ kpl, joten siirtymiä on yhteensä vähemmän kuin $2n$ kpl. □

Lauseessa 1.5.9 Algoritmille 1.5.2 saatu vertailujen määrän $\mathcal{O}(n)$ raja ei välttämättä todista, että todellinen aikavaatimus olisi myös $\mathcal{O}(n)$. Aikavaatimukseen vaikuttavat myös seuraavat operaatiot:

1. $goto[q, a]$:n evaluointi	$\mathcal{O}(1)$ tai $\mathcal{O}(\log \min(k, \sigma))$
2. $fail[q]$:n evaluointi	$\mathcal{O}(1)$
3. testaus: $output[q] = \emptyset$	$\mathcal{O}(1)$
4. $output[q]$:n tulostaminen	?

Jos kaikki funktiot esitetään taulukkoina, Alg. 1.5.2:n aikavaatimus on $\mathcal{O}(n + r)$, missä r on esiintymien kokonaismäärä. Jos Σ:n alkiot eivät ole kokonaislukuja (tai σ on suuri), on taulukoiden sijasta käytettävä esim. listoja tai hakupuita, jotka antavat aikavaatimuksen $\mathcal{O}(n \log(\min(k, \sigma)) + r)$.

Keskitytään jatkossa taulukkototeutukseen.

Lause 1.5.10 *Lause Alg. 1.5.3 laskee goto-funktion ja alustaa output-funktion ajassa $\mathcal{O}(\sigma m)$.*

Todistus. Helppo. □

Lause 1.5.11 *Lause Alg. 1.5.4 laskee $fail$-funktion ja viimeistelee output-funktion ajassa $\mathcal{O}(\sigma m)$.*

Todistus. Väite seuraa helposti, kun huomioidaan:

- Rivin (12) silmukka suoritetaan alle m kertaa, koska $fail$-siirtymien määrä voidaan rajata alle m:n kuten lauseen 1.5.9 todistuksessa.

- *output*-funktioiden yhdiste voidaan toteuttaa listojen katenaationa ajassa $\mathcal{O}(1)$.

□

Seuraus 1.5.12 *AC-algoritmin kokonaisaikavaatimus on $\mathcal{O}(n + \sigma m + r)$.*

Jos aakkoston koko on vakio ja tulosteen koko oletetaan pieneksi, aikavaatimus on $\mathcal{O}(n + m)$.

Koetulos: $n = 10^7$, etsintäaika tunteina

	$k = 15$	$k = 24$
triv.ratk.	0.79	1.27
AC	0.18	0.21

1.6 Hahmonsovitus äärellisen automaatin avulla

K. Thompson: Regular expression search algorithm. *Communications of the ACM* 11:419–422, 1968.

Edellä on tarkasteltu tapauksia: yksi hahmo ja joukko hahmoja. Seuraavassa tarkastellaan yleisempää tapausta, jossa etsittävien hahmojen joukko on ilmaistu säännöllisenä lausekkeena. Aluksi hieman kertausta:
Määritelmä 1.6.1 *Säännölliset lausekkeet:*

1. *$\emptyset$ on säännöllinen lauseke; $\emptyset$ esittää tyhjää merkkijonojoukkoa.*
2. *ϵ on säännöllinen lauseke; ϵ esittää joukkoa $\{\epsilon\}$, ϵ = tyhjä jono.*
3. *Kaikilla $a \in \Sigma$, a on säännöllinen lauseke; a esittää joukkoa $\{a\}$.*
4. *Jos A ja B ovat säännöllisiä lausekkeita ja $L(A)$ ja $L(B)$ ovat näiden esittämät joukot, seuraavat lausekkeet ovat säännöllisiä lausekkeita:*

$$\begin{aligned} (A \cup B) \text{ yhdiste} \quad &; \quad L(A \cup B) = L(A) \cup L(B) \\ (AB) \text{ katenaatio} \quad &; \quad L(AB) = L(A)L(B) \\ (A^*) \text{ sulkeuma} \quad &; \quad L(A^*) = L(A)^* \end{aligned}$$

Ongelma 1.6.2 *On annettu säännöllinen lauseke A (= hahmojoukon esitys) ja teksti S.*

O1. Onko $S \in L(A)$?

O2. Anna kaikki S:n alkuosat, jotka kuuluvat joukkoon $L(A)$.

O3. Etsi kaikki $L(A)$:n jonojen esiintymät S:stä.

- O1:n ratkaisu: Muodostetaan epädeterministinen äärellinen automaatti M_A siten, että sen hyväksymä kieli on $L(M_A) = L(A)$. Selataan S M_A:lla. Tutkitaan lopussa, onko M_A lopputilassa.
- O2:n ratkaisu: Kuten O1, mutta tutkitaan jokaisen merkin jälkeen, onko M_A lopputilassa.
- O3:n ratkaisu: Ratkaistaan O2 lausekkeella $\Sigma^* A$ (missä Σ on kaikkien aakkoston merkkien yhdiste $a \cup b \cup \ldots$).

Tarkastellaan jatkossa lähinnä ongelmaa O1.

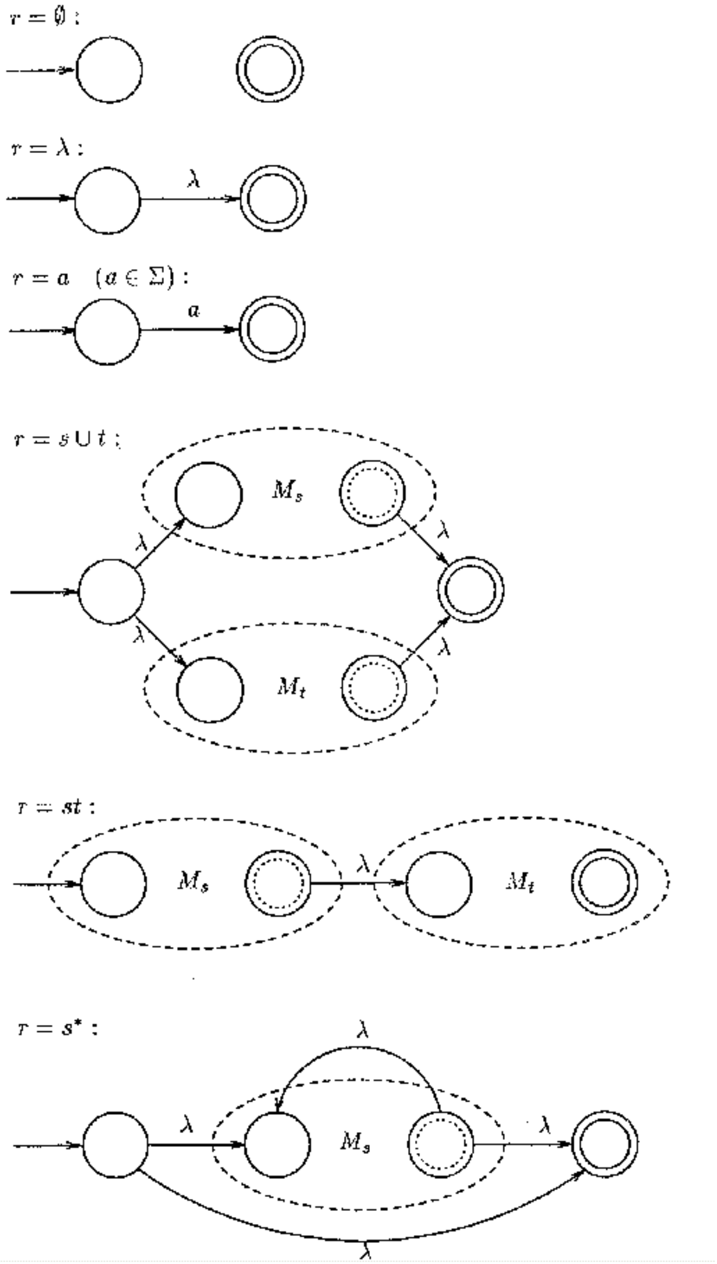
Määritelmä 1.6.3 *Epädeterministinen äärellinen automaatti (NFA) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ muodostuu osista:*

1. *Q on äärellinen tilojen joukko.*
2. *Σ on syöttöaakkosto.*
3. *δ on tilasiirtymäfunktio, $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to Q$:n osajoukot ($\delta$ siis sallii useita siirtymiä samalla aakkosella).*
4. *$q_0 \in Q$ on alkutila.*
5. *$F \subseteq Q$, lopputilojen joukko.*

Nyt voidaan myös määritellä:

- *Siirto*: $(q, aw) \vdash (q', w)$ jos $q' \in \delta(q, a)$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $w \in \Sigma^*$.
- *Hyväksytty kieli*: $L(M) = \{w \mid (q_0, w) \vdash^* (q, \epsilon), q \in F\}$, missä "$\vdash^*$" tarkoittaa "0:lla tai useammalla siirrolla".

M_A:n konstruktio A:sta on esitetty esim. kurssilla Laskennan mallit ja kuvassa 1.1.



Kuva 1.1: NFA:n konstruktio säännöllisestä lausekkeesta. Kuvan λ on sama kuin tekstin ϵ.

Lause 1.6.4 *Olkoon NFA $M_A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ konstruoitu A:sta em. tekniikalla. Silloin $L(M_A) = L(A)$ ja*

(1) $|Q| = 2|A|$ ($|A|$ on A:n pituus merkkeinä).

(2) $\delta(q_f, a) = \emptyset$ kaikilla $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

(3) Kustakin tilasta $q \in Q$ lähtee korkeintaan 2 siirtymää.

Todistus. $L(M_A) = L(A)$: ks. esim. Ohjelmoinnin ja laskennan perusmallit -kurssi. Väite (2) pätee selvästi konstruktion nojalla. Väitteet (1) ja (3) osoitetaan induktiolla $|A|$:n suhteen. □

Tekstin S selaaminen automaatilla M_A

Tarkastellaan, miten NFA M_A:n vaihtoehtoisia polkuja voidaan seurata samanaikaisesti. Vaihtoehtoinen ratkaisutapa olisi muodostaa ensin M_A:sta vastaava deterministinen äärellinen automaatti M'_A. M'_A voi olla hyvin suuri: $|M'_A| = \mathcal{O}(2^t)$, missä t on M_A:n tilojen lukumäärä, joten M'_A :n muodostaminen ei aina kannata, varsinkaan jos S on lyhyt. M'_A:n etuna on, että S voidaan selata ajassa $\mathcal{O}(|S|)$.

Merkitään Q_j:llä niiden tilojen joukkoa, joissa M_A voi olla luettuaan jonon $S[0 \ldots j)$: $Q_j = \{q \mid (q_0, S[0 \ldots j)) \vdash^* (q, \epsilon)\}$. Silloin: $q \in Q_j$, jos ja vain jos on olemassa $q' \in Q_{j-1}$ siten, että tilasta q' siirrytään tilaan q_1 merkillä $S[j-1]$ ja tilasta q_1 siirrytään 0:lla tai useammalla ϵ-siirrolla tilaan q.

Algoritmi 1.6.5 *NFA:n simulointi*

Syöte: NFA $M_A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$, Teksti $S = S[0 \ldots n)$.
Tuloste: Tilajoukkojono $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$.
Huom. $S \in L(M_A)$, jos ja vain jos $q_f \in Q_n$.
Jono *queue* ja joukot $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ ovat aluksi tyhjiä.

for $j := 0$ **to** n **do**
    merkitse kukin $q \in Q$ saavuttamattomaksi
    if $j = 0$ **then** $Q_0 := \{q_0\}$; $queue := \{q_0\}$; merkitse q_0 saavutetuksi
    else
        for $q \in Q_{j-1}$ **do for** $p \in \delta(q, S[j-1])$ **do**
            if p on saavuttamaton **then**
                $Q_j := Q_j \cup \{p\}$
                $push\_back(queue, p)$
                merkitse p saavutetuksi

(10) **while** $queue \neq \emptyset$ **do**
(11) $\quad q := pop\_front(queue)$
(12) $\quad$ **for** $p \in \delta(q, \epsilon)$ **do**
(13) $\quad\quad$ **if** p on saavuttamaton **then**
(14) $\quad\quad\quad Q_j := Q_j \cup \{p\}$
(15) $\quad\quad\quad push\_back(queue, p)$
(16) $\quad\quad\quad$ merkitse p saavutetuksi

Riveillä 10-16 seurataan ϵ-siirtymiä ja se osa voitaisiin jättää pois, jos automaatissa ei olisi ϵ-siirtymiä. Niiden poisto saattaisi kuitenkin kasvattaa siirtymien määräksi $\mathcal{O}(|Q|^2)$.
Merkitään: $||M_A||$ = tilojen lkm + siirtymien lkm.

Lause 1.6.6 *NFA M_A:n simulointi Algoritmilla 1.6.5, kun syöte on $S = s[0 \ldots n)$, vie ajan $\mathcal{O}(||M_A|| \cdot n)$.*

Todistus.

- Rivi 2 vie ajan $\mathcal{O}(|Q|)$.
- Siirtymäfunktion δ evaluointi voidaan toteuttaa ajassa $\mathcal{O}(1)$, koska kustakin tilasta on enintään kaksi siirtymää. Kaikki muutkin operaatiot toimivat vakioajassa.
- Riveillä 3–16 viedään vain saavuttamattomia tiloja jonoon ja merkitään ne samalla saavutetuiksi. Sitten seurataan saavutetuista tiloista alkavia siirtymiä, joten kutakin siirtymää seurataan korkeintaan kerran. Yhden siirtymän käsittely vie $\mathcal{O}(1)$ ajan, joten aikaa kuluu $\mathcal{O}$(siirtymien lkm).
- Rivit 2–16 toistetaan n kertaa. Siis kokonaisaika on $\mathcal{O}(||M_A|| \cdot n)$.

$\square$

Seuraus 1.6.7 *Koska $||M_A|| \leq 6 \cdot |A|$ (Lause 1.6.4), voidaan*

- *testata onko $S \in L(A)$ ajassa $\mathcal{O}(|A| \cdot |S|)$ (ongelma O1),*
- *laskea S:n alkuosat, jotka ovat $L(A)$:ssa, ajassa $\mathcal{O}(|A| \cdot |S|)$ (ongelma O2), ja*
- *löytää S:stä $L(A)$:n jonojen esiintymät ajassa $\mathcal{O}((|\Sigma| + |A|) \cdot |S|)$ (ongelma O3).*

Todistus. O2: Ajassa $\mathcal{O}(|A|)$ voidaan tutkia, sisältääkö Q_j lopputilan.
O3: $|\Sigma^* A| = \mathcal{O}(|\Sigma| + |A|)$. $\square$

1.7 Hahmonsovituksen erikoistapauksia

Edellä käsiteltiin tapausta, jossa hahmojen joukko esitettiin säännöllisenä lausekkeena. Luonnollinen kysymys on

- löytyykö sellaisia ei-triviaaleja säännöllisten lausekkeiden aliluokkia, jolla hahmontunnistus voitaisiin toteuttaa oleellisesti nopeammin kuin Algoritmilla 1.6.5?

Tarkastellaan lyhyesti joitakin tällaisia aliluokkia.

1.7.1 Merkkiluokat

Tarkastellaan tapausta, jossa hahmon "merkit" ovat *merkkiluokkia*, jotka voivat täsmätä useampaan eri merkkiin. Toisin sanoen on annettu hahmo $P = p_0 p_1 \cdots p_{m-1}$, jonka merkit ovat aakkoston osajoukkoja: $p_i \subseteq \Sigma$. Hahmo P esiintyy tekstin S kohdassa j, jos $s_{j+i} \in p_i$ kaikilla $i \in [0, m)$.

Esimerkki 1.7.1 *Hahmo $[Aa][Ss][Ss][Ii]$ täsmää sanaan assi, mutta sallii pienten ja isojen kirjainten kaikki yhdistelmät.*

Shift-or-algoritmi voidaan helposti muokata tähän tapaukseen.

- Ainoa muutos koskee vektoreita $T[a]$, $a \in \Sigma$, jotka kertovat mihin hahmon kohtiin kukin merkki täsmää.
- Itse haun suorittava pääsilmukka ei muutu ollenkaan.

Algoritmissa 1.3.1 rivi (2)

(2) **for** $i := 0$ **to** $m-1$ **do** $T[p[i]] := T[p[i]] - 2^i$

korvataan seuraavilla riveillä:

(2) **for** $i := 0$ **to** $m-1$ **do**
  for $a \in p[i]$ **do** $T[a] := T[a] - 2^i$

- Selauksen aikavaatimus säilyy samana: $O(\lceil m/w \rceil n)$.
- Alustuksen aikavaatimus on nyt $O(\lceil m/w \rceil \sigma + ||P||)$, missä $||P|| = \sum_{i \in [0,m)} |p_i|$ on hahmon merkkiluokkien yhteiskoko.

Shift-or-algoritmia voidaan yleistää vielä lisää:

- Sallitaan hahmossa erikoismerkit ? ja $*$.
- p_i? tarkoittaa, että merkki tai merkkiluokka p_i on valinnainen.
- p_i* tarkoittaa, että p_i esiintyy 0 kertaa tai useammin.

Esimerkki 1.7.2 *Hahmo $s?h[ei][rs]*$ täsmää mm. sanoihin he, she, his ja hers.*

- Tuetaan siis kaikkia äärellisten lausekkeiden konstruktioita, mutta sillä rajoituksella, että yhdistettä (merkkiluokka) ja sulkeumaa (*) voidaan soveltaa vain yksittäiseen merkkiin tai merkkiluokkaan, ei mielivaltaiseen säännölliseen lausekkeeseen.

Yleistys on merkkiluokkia monimutkaisempi ja ohitetaan tässä. Lisätietoa löytyy kirjasta:

G. Navarro & M. Raffinot: *Flexible Pattern Matching in Strings*. Cambridge University Press, 2002.

1.7.2 Jokerimerkit

M. Fischer & M. Paterson. String matching and other products. Teoksessa *R. Karp, editor, SIAM AMS Complexity of Computation*, sivut 113–125, 1974.

Merkkiluokkia rajoitetumpi tapaus on sallia hahmossa normaalien merkkien lisäksi jokerimerkkejä #, jotka täsmäävät mihin tahansa yksittäiseen merkkiin.

Esimerkki 1.7.3 *Hahmolle $P =$ `#oke#i` löytyy 3 esiintymää tekstissä $S =$ `sokeripokeritokeni`.*

Ratkaisuja

- Triviaalialgoritmi. Aikavaatimus $\mathcal{O}(nm)$.
- Shift-or-algoritmi. Aikavaatimus $\mathcal{O}(n\lceil m/w \rceil)$.
- Fischer-Paterson-algoritmi. Aikavaatimus $\mathcal{O}(n \log^2 m \log\log m)$.

Fischer-Paterson-algoritmi palauttaa ongelman kokonaislukujen kertolaskuun, johon on tunnetusti kehitetty useita algoritmeja eri laskennan malleissa.

Lause 1.7.4 *Olkoon jokerimerkkejä sisältävien hahmon ja tekstin pituudet m ja n, $m \leq n$. Tällöin hahmon esiintymät tekstisssä voidaan löytää ajassa $IM(n \log m, m \log m)$, missä $IM(N, M)$ on kahden N ja M, $N \geq M$, bittiä pitkien kokonaislukujen kertolaskuun tarvittava aika.*

Schönhage-Strassen kertolaskualgoritmi käyttää $O(N \log M \log\log M)$ bittioperaatiota, mistä seuraa $O(n \log^2 m \log\log m)$ algoritmi hahmonsovitukselle jokerimerkkien kanssa. Kertolaskussa voidaan käyttää myös tietokoneen omaa kertolasku-operaatiota, mutta tällöin aikavaatimukseksi tulee $O(mn)$, eli sama kuin triviaalialgoritmilla.

Algoritmin kuvaus ohitetaan tässä, mutta se löytyy esim. syksyn 2005 kurssin muistiinpanoista ja kirjasta

M. Crochemore & W. Rytter. *Jewels of Stringology*.
World Scientific, 2003.

Luku 2

Likimääräinen hahmonsovitus

Useissa sovelluksissa ei ole mielekästä etsiä vain hahmon P tarkkoja esiintymiä, vaan pyritään löytämään kaikki tekstin osajonot, jotka ovat riittävän lähellä hahmoa P. Jonojen samankaltaisuuden eräs mitta on *editointietäisyys*.

2.1 Editointietäisyys

Olkoon $A = a_1 \cdots a_m \in \Sigma^*$ "lyöntivirheitä sisältävä jono" ja $B = b_1 \cdots b_n \in \Sigma^*$ "virheetön jono".

- Merkkijonojen A ja B välinen editointietäisyys on pienin editointioperaatioiden lukumäärä, joka tarvitaan korjaamaan virheellinen jono A virheettömään muotoon B.

- Editointioperaatiot

  P. *Poisto*: A:n merkkiä a_i ei vastaa mikään B:n merkki, $a_i \to \epsilon$.

  L. *Lisäys*: B:n merkkiä b_j ei vastaa mikään A:n merkki, $\epsilon \to b_j$.

  M. *Muutos*: A:n merkkiä a_i vastaa B:n merkki b_j, $a_i \neq b_j$, $a_i \to b_j$.

- Operaatiot M eivät saa mennä ristiin:

  – Jos $a_i \to b_j$ ja $a_{i'} \to b_{j'}$, niin $i < i'$, jos ja vain jos $j < j'$.

- Usein on myös hyödyllistä määritellä "operaatio":

  T. *Täsmäys*: A:n merkkiä a_i vastaa B:n merkki b_j, $a_i = b_j$, $a_i \to b_j$.

Määritelmä 2.1.1 *Merkkijonojen A ja B välinen editointietäisyys $D(A, B)$ on pienin editointioperaatioiden P, L ja M määrä, joka tarvitaan muuntamaan A B:ksi.*

- Editointietäisyydestä käytetään myös nimitystä *Levenshtein*-etäisyys.
- Jos sallitaan pelkkä operaatio M (muutos), etäisyydestä käytetään nimitystä *Hamming*-etäisyys.
- Voidaan osoittaa, että D on *metriikka*:
  1) $D(A, B) \geq 0$,
  2) $D(A, B) = 0$, jos ja vain jos $A = B$,
  3) $D(A, B) = D(B, A)$,
  4) $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$.

Esimerkki 2.1.2 $A = \texttt{abba}$, $B = \texttt{bbb}$

```
abba                        abba
|:||   3 operaatiota        |::|   2 operaatiota
bb b                        bbb
```

Tarvitaan vähintään yksi poisto, koska $|A| = |B| + 1$, ja vähintään yksi lisäys tai muutos, koska B:ssä on yksi b enemmän kuin A:ssa. Tämän ja ylläolevan perusteella $D(A, B) = 2$.

Editoinnin havainnollistaminen

1. Jäljitys (trace)

```
i n d u s t r y
| |
i n t e r e s t
```

- Viivat eivät saa mennä ristiin. (Miksi?)

2. Kohdistus

```
indust-ry--
in---terest
```

3. Operaatiojono

```
TTPPPTLTMPP
indust-ry--
in---terest
```

4. Operaatioiden luettelo

industry	$d \to \epsilon$	intery	$\epsilon \to e$
inustry	$u \to \epsilon$	interey	$y \to s$
instry	$s \to \epsilon$	interes	$\epsilon \to t$
intry	$\epsilon \to e$	interest	

2.2 Editointietäisyyden laskeminen

Merkitään $d_{ij} = D(a_1 \cdots a_i, b_1 \cdots b_j)$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$.
Lause 2.2.1 *Editointietäisyydet d_{ij} ja erityisesti $d_{mn} = D(A, B)$ voidaan laskea palautuskaavasta*

$$d_{ij} = \min\{d_{i-1,j-1} + (\textbf{\textit{if}}\ a_i = b_j\ \textbf{\textit{then}}\ 0\ \textbf{\textit{else}}\ 1), d_{i-1,j} + 1, d_{i,j-1} + 1\}, \tag{2.1}$$

missä $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, kun alustetaan

$$\begin{aligned} d_{00} &= 0, \\ d_{i0} &= i,\ 1 \leq i \leq m,\ ja \\ d_{0j} &= j,\ 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Todistus. Induktio.
1. Alustus on oikein:

$$\begin{aligned} d_{00} &= D(\epsilon, \epsilon) = 0, \\ d_{i0} &= D(a_1 a_2 \cdots a_i, \epsilon) = |(a_1 \to \epsilon)(a_2 \to \epsilon) \cdots (a_i \to \epsilon)| = i, \\ d_{0j} &= D(\epsilon, b_1 b_2 \cdots b_j) = |(\epsilon \to b_1)(\epsilon \to b_2) \cdots (\epsilon \to b_j)| = j. \end{aligned}$$

2. Induktioaskel:

- Oletetaan, että $d_{i',j'}$ on oikein, kun $i' + j' < i + j$. Tarkastellaan $a_1 a_2 \cdots a_i$:n ja $b_1 b_2 \cdots b_j$:n viimeisten merkkien mahdollisia editointeja. Tapauksia on kolme:

(i) $a_i \to b_j$ (muutos tai täsmäys): Lyhimmän tällaisen editointijonon pituus on $d_{i-1,j-1} + (\textbf{if } a_i = b_j \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1)$.

(ii) $a_i \to \epsilon$ ja b_j:hin kohdistuu muutos tai täsmäys: Lyhimmän tällaisen editointijonon pituus on $d_{i-1,j} + 1$.

(iii) $\epsilon \to b_j$ ja a_i:hin kohdistuu muutos tai täsmäys: Lyhimmän tällaisen editointijonon pituus on $d_{i,j-1} + 1$.

- Tapausta, jossa samanaikaisesti $a_i \to \epsilon$ ja $\epsilon \to b_j$ ei tarvitse ottaa huomioon, koska sen pituus on $d_{i-1,j-1} + 2 > d_{i-1,j-1} + 1$.

- Lyhin editointijono $a_1 a_2 \cdots a_i \to b_1 b_2 \cdots b_j$ on pituudeltaan kohtien (i), (ii) ja (iii) minimi, joten kaava (2.1) pätee. □

Esimerkki 2.2.2 $A = \texttt{ballad}, B = \texttt{handball}$

d		h	a	n	d	b	a	l	l
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b	1	1	2	3	4	4	5	6	7
a	2	2	1	2	3	4	4	5	6
l	3	3	2	2	3	4	5	4	5
l	4	4	3	3	3	4	5	5	4
a	5	5	4	4	4	4	4	5	5
d	6	6	5	5	4	5	5	5	6

$D(A, B) = d_{mn} = d_{6,8} = 6$.

Arvojen (d_{ij}), $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$, laskenta voidaan toteuttaa *taulukointina* eli käyttämällä ns. *dynaamista ohjelmointia*:

Algoritmi 2.2.3 *$D(A, B)$:n laskenta dynaamisella ohjelmoinnilla, perusversio.*

Syöte: $A = a_1 a_2 \cdots a_m$, $B = b_1 b_2 \cdots b_n$
Tuloste: Matriisi (d_{ij}), $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$, $d_{mn} = D(A, B)$
(1) **for** $i := 0$ **to** m **do** $d_{i0} := i$; (* alustukset *)
(2) **for** $j := 1$ **to** n **do** $d_{0j} := j$;
(3) **for** $j := 1$ **to** n **do**
(4)   **for** $i := 1$ **to** m **do**
(5) $d_{ij} := \min\{d_{i-1,j-1} + (\textbf{if } a_i = b_j \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1), d_{i-1,j} + 1, d_{i,j-1} + 1\}$

- Aikavaatimus on $\Theta(mn)$.