582206 Laskennan mallit

Erilliskoe 09.04.2010. Ratkaisuja ja arvosteluperusteet

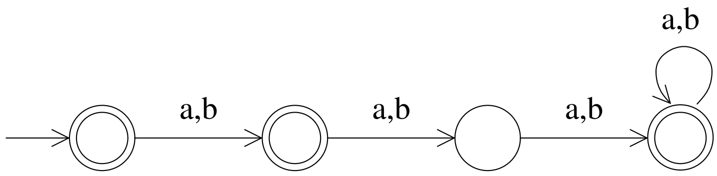
1. [*6+6 pistettä*] Esitä seuraaville aakkoston $\{a, b\}$ kielille säännöllinen lauseke, (deterministinen tai epädeterministinen) äärellinen automaatti *ja* yhteydetön kielioppi.

   (a) Kieli koostuu kaikista merkkijonoista, joiden pituus *ei* ole kaksi.

   Vastaus:

   Säännöllinen lauseke: $\varepsilon \cup \mathrm{a} \cup \mathrm{b} \cup \big((\mathrm{a} \cup \mathrm{b})(\mathrm{a} \cup \mathrm{b})(\mathrm{a} \cup \mathrm{b})(\mathrm{a} \cup \mathrm{b})^*\big)$

   Deterministinen äärellinen automaatti:



   Yhteydetön kielioppi:

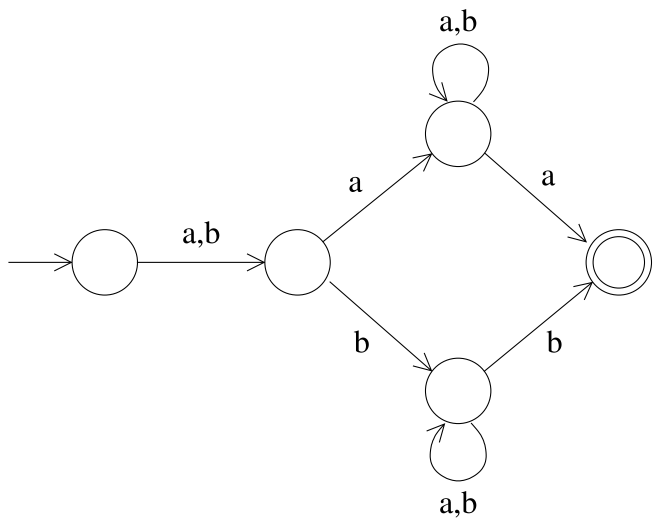
$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & UUUT \mid U \mid \varepsilon \\ T & \rightarrow & UT \mid \varepsilon \\ U & \rightarrow & \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \end{array}$$

   (b) Kieli koostuu kaikista vähintään kolmen merkin pituisista merkkijonoista, joiden toinen ja viimeinen merkki ovat samat.

   Vastaus:

   Säännöllinen lauseke: $(\mathrm{a} \cup \mathrm{b})\big(\mathrm{a}(\mathrm{a} \cup \mathrm{b})^*\mathrm{a} \cup \mathrm{b}(\mathrm{a} \cup \mathrm{b})^*\mathrm{b}\big)$

   Epädeterministinen äärellinen automaatti:



   Yhteydetön kielioppi:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & U\mathrm{a}T\mathrm{a} \mid U\mathrm{b}T\mathrm{b} \\ T & \rightarrow & UT \mid \varepsilon \\ U & \rightarrow & \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \end{array}$$

Arvostelu: Kustakin lausekkeesta, automaatista ja kieliopista 2 pistettä.
Pienistä virheistä vähennetään piste.

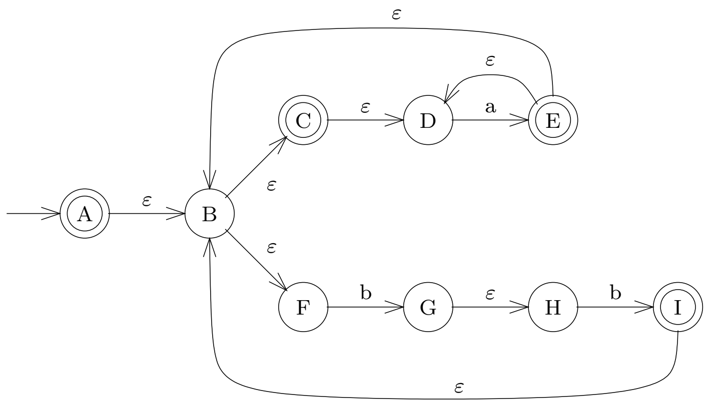
2. [*6+6 pistettä*] Olkoon aakkosto $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$.

   (a) Muodosta säännöllisestä lausekkeesta

$$(\mathrm{a}^* \cup \mathrm{bb})^*$$

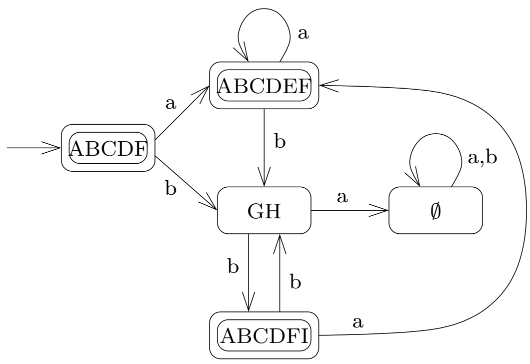
   epädeterministinen äärellinen automaatti.

   Vastaus:



   (b) Muunna (a)-kohdassa saamasi epädeterministinen automaatti deterministiseksi.

   Vastaus:



Käytä kummassakin kohdassa kurssilla esitettyä menetelmää. Menetelmiä ei tarvitse selostaa eikä välivaiheita antaa, kunhan lopputuloksesta selvästi näkee, että se on saatu asianmukaisella menetelmällä.

Arvostelu:

- 6 pistettä oikein laadistusta automaatista. (b)-kohdassa voi saada täydet pisteet, vaikka (a)-kohdan automaatti on virheellinen, kunhan se ei ole oleellisesti yksinkertaisempi kuin oikea vastaus.
- 4 pistettä oikean kielen tunnistavasta, mutta ei kurssin menetelmän mukaisesti laaditusta automaatista.
- Pienistä virheistä vähennetään piste.
- Enintään 4 pistettä automaatista, joka tunnistaa väärän kielen.

3. [*8+4 pistettä*] Määritellään aakkoston $\{0, 1\}$ *tähdettömät säännölliset lausekkeet* seuraavasti:

- ε, 0 ja 1 ovat tähdettömiä säännöllisiä lausekkeita.
- Jos A ja B ovat tähdettömiä säännöllisiä lausekkeita, niin myös $A \circ B$ ja $A \cup B$ ovat.
- Jos A on tähdetön säännöllinen lauseke, niin myös (A) on.
- Ei ole muita tähdettömiä säännöllisiä lausekkeita.

Tähdettömät säännölliset lausekkeet siis muodostavat kielen aakkostossa $\{\varepsilon, 0, 1, (,), \circ, \cup\}$.

(a) Esitä kielelle yhteydetön kielioppi. Täysiin pisteisiin vaaditaan, että kielioppi on yksiselitteinen.

Vastaus: Kielioppi

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \cup S \mid T \\ T &\rightarrow U \circ T \mid U \\ U &\rightarrow (S) \mid 0 \mid 1 \mid \underline{\varepsilon} \end{aligned}$$

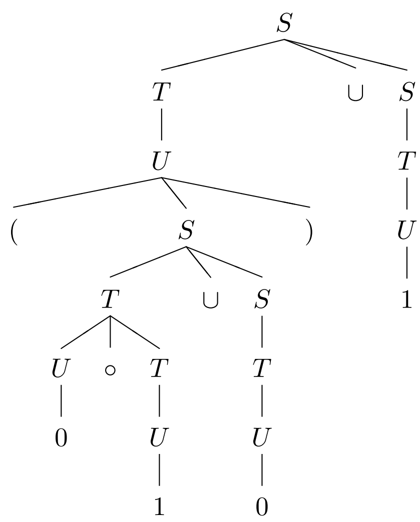
missä $\underline{\varepsilon}$ esittää säännöllisen lausekkeen symbolia (erotukseksi kuvauskielen tyhjästä merkkijonosta).

(b) Anna kielioppisi mukainen jäsennyspuu ja vasen johto merkkijonolle $(0 \circ 1 \cup 0) \cup 1$.

Vastaus: Vasen johto

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow T \cup S \\ &\Rightarrow U \cup S \\ &\Rightarrow (S) \cup S \\ &\Rightarrow (T \cup S) \cup S \\ &\Rightarrow (U \circ T \cup S) \cup S \\ &\Rightarrow (0 \circ T \cup S) \cup S \\ &\Rightarrow (0 \circ U \cup S) \cup S \\ &\Rightarrow (0 \circ 1 \cup S) \cup S \\ &\Rightarrow (0 \circ 1 \cup T) \cup S \\ &\Rightarrow (0 \circ 1 \cup U) \cup S \\ &\Rightarrow (0 \circ 1 \cup 0) \cup S \\ &\Rightarrow (0 \circ 1 \cup 0) \cup T \\ &\Rightarrow (0 \circ 1 \cup 0) \cup U \\ &\Rightarrow (0 \circ 1 \cup 0) \cup 1 \end{aligned}$$

Jäsennyspuu



Arvostelu: Kieliopista 8 pistettä, johdosta ja puusta 2 pistettä kummastakin.
Moniselitteisestä mutta muuten virheettömästä kieliopista 6 pistettä.
Pienistä virheistä vähennetään piste, isommista enemmän.

4. [*6+6 pistettä*] Kahden kielen $A \in \Sigma^*$ ja $B \in \Sigma^*$ symmetrinen erotus on kieli

$$A \ominus B = \{w \in A \cup B \mid w \notin A \cap B\} .$$

Toisin sanoen $w \in A \ominus B$, jos w kuuluu täsmälleen yhteen kielistä A ja B.

(a) Jos tiedetään, että kielet A ja B ovat säännöllisiä, voidaanko päätellä, että $A \ominus B$ on säännöllinen?

Vastaus: Voidaan päätellä.

Oletetaan nimittäin, että A ja B ovat säännöllisiä. Säännöllisten kielten luokka on suljettu komplementoinnin suhteen, joten myös $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ ovat säännöllisiä. Koska säännöllisten kielten luokka on suljettu leikkauksen suhteen, edelleen $A \cap \overline{B}$ ja $B \cap \overline{A}$ ovat säännöllisiä. Lopulta $A \ominus B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ on säännöllinen, sillä se on kahden säännöllisen kielen yhdiste, ja säännöllisten kielten luokka on suljettu myös yhdisteen suhteen.

(b) Jos tiedetään, että kielet A ja B ovat yhteydettömiä, voidaanko päätellä, että $A \ominus B$ on yhteydetön?

Vastaus: Ei voida päätellä.

Tiedetään, että on olemassa yhteydettömiä kieliä, joiden komplementti ei ole yhteydetön. Olkoon A jokin tällainen kieli. Valitaan $B = \Sigma^*$, joka on selvästi yhteydetön, ja jolloin $\overline{B} = \emptyset$. Nyt

$$A \ominus B = (A \cap \emptyset) \cup (\Sigma^* \cap \overline{A}) = \overline{A}.$$

Mutta oletuksen mukaan $\overline{A}$ ei ole yhteydetön.

Perustele vastauksesi. Voit käyttää mitä tahansa kurssilla todistettuja tuloksia.

Arvostelu: Kummastakin osatehtävästä:

- 2 pistettä oikeasta vastauksesta
- 2 pistettä oikein kuvatuista sulkeumaominaisuuksista ja
- 2 pistettä lisää pätevästä perustelusta.

5. [*12 pistettä*] Mikä on Churchin-Turing teesi? Millaisia perusteluja sille voidaan esittää? Mitä seuraamuksia teesillä on tietojenkäsittelyn tutkimukselle?

Vastaus: Churchin-Turingin teesi sanoo, että laskennallinen ongelma voidaan ratkaista algoritmisesti (eli mekaanisesti seuraamalla annettuja yksikäsitteisiä ohjeita), jos ja vain jos se on Turing-ratkeava.

Teesiä voi perustella erittelemällä, mikä on intuitiivisesti mekaanista laskentaa ja mikä ei, ja osoittamalla, miten tämä vastaa Turingin konetta (esim. äärellinen määrä tiedonkäsittelyä yhdessä laskenta-askelessa, periaatteessa rajoittamaton määrä apumuistia). Teknisempi peruste on, että erilaiset yritykset määritellä mekaaninen laskenta ovat johtaneet matemaattisesti ekvivalenttiin lopputulokseen. Mitkään nykytietämyksen valossa fysikaalisesti realisoitavissa olevat laskentalaitteet, mukaanlukien hieman spekulatiivisemmat kuten esim. kvanttitietokone, eivät ylitä Turingin koneen laskentavoimaa.

Tietojenkäsittelyteorian kannalta teesi tarkoittaa, että Turingin kone on (eräs) ”oikea” malli, jos haluamme tutkia algoritmisen ratkeavuuden rajoja. Siis Turingin koneita koskeva pysähtymisongelman ratkeamattomuus jne. vaikuttavat suoraan siihen, millaisia ongelmia kannattaa yrittää ratkaista (nykyisillä tai tulevilla) tietokoneilla.

Arvostelu: Teesin esitys 4 pistettä, perustelut 4 pistettä, seuraamukset 4 pistettä.
Tehtävään ei ole mitään yksittäistä oikeaa vastausta, joten pisteitä saa hyvin esitetyistä argumenteista, vaikka ne eivät noudattaisikaan juuri edellä esitettyä kuviota. Väitteiden ja perusteluiden epämääräisyydestä, epätarkasta käsitteiden käyttämisestä jne. kuitenkin vähennetään pisteitä.