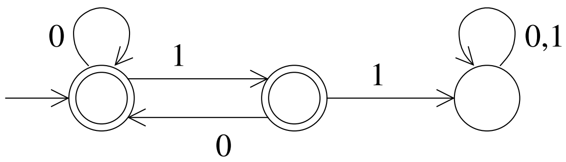
582206 Laskennan mallit

Erilliskoe 04.06.2010. Ratkaisuja

1. [*3+3 pistettä*] Anna seuraaville aakkoston $\{0, 1\}$ kielille valintasi mukaan joko säännöllinen lauseke tai (deterministinen tai epädeterministinen) äärellinen automaatti.

   (a) Kieli A_1 sisältää kaikki merkkijonot, joissa ei ole kahta ykköstä peräkkäin.

   Vastaus: Deterministinen äärellinen automaatti:



   (b) Kieli B_1 on yhteydettömän kieliopin

$$S \to SS \mid X$$
$$X \to 0X \mid 1$$

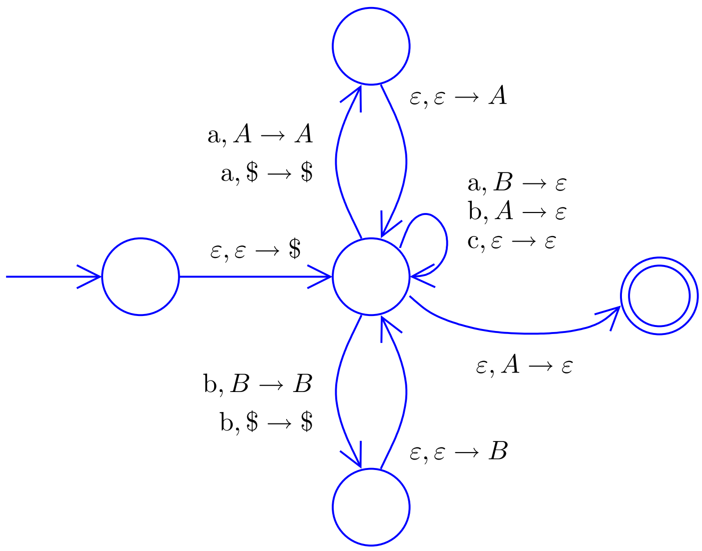
   tuottama kieli.

   Vastaus: Säännöllinen lauseke: $(0^*1)^+ = (0 \cup 1)^*1$.

2. [*6+6+6 pistettä*] Tarkastellaan seuraavia aakkoston $\{a, b, c\}$ kieliä.

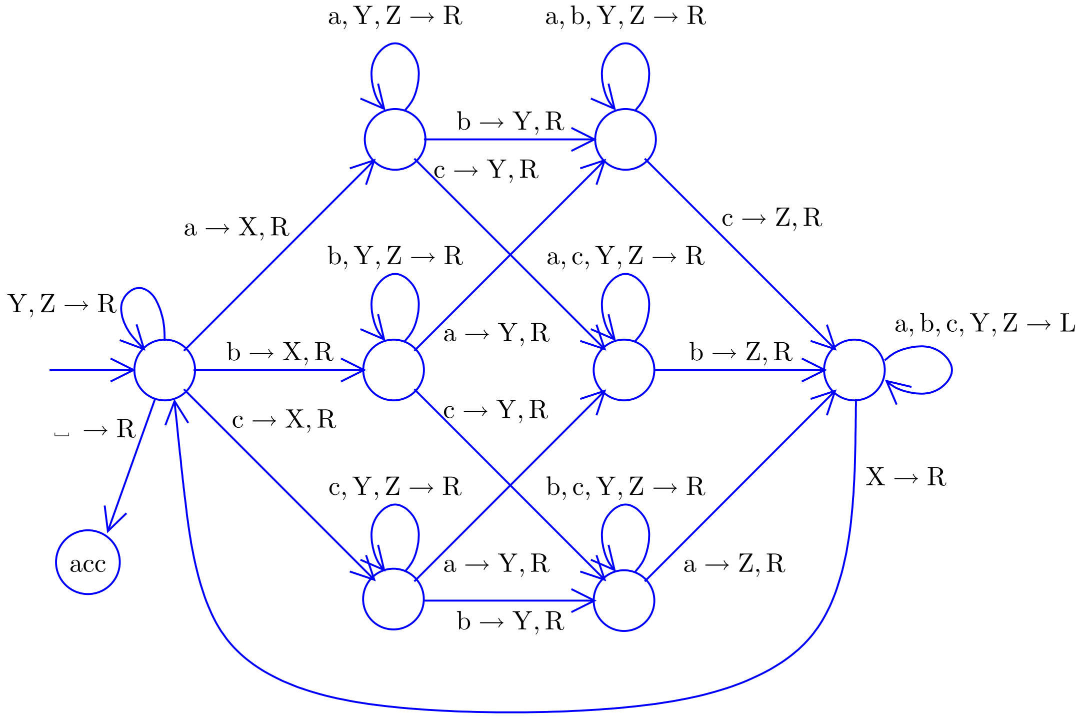
   (a) Kieli A_2 sisältää kaikki merkkijonot, joissa a-merkkejä on enemmän kuin b-merkkejä. (c-merkkien määrällä ei ole väliä.)

   Vastaus: Kieli A_2 on yhteydetön, mutta ei säännöllinen. Sen tunnistaa seuraava pinoautomaatti:



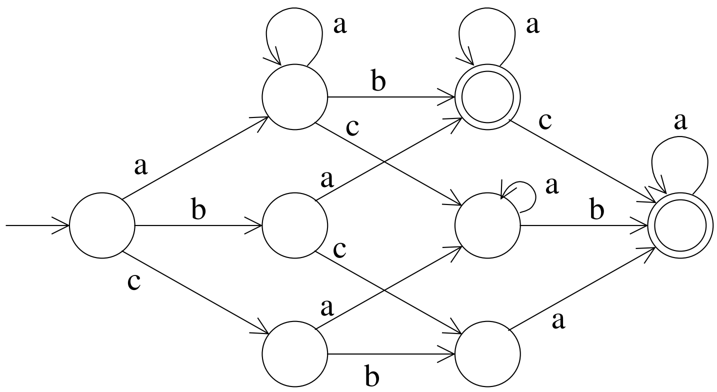
   (b) Kieli B_2 sisältää kaikki merkkijonot, joissa a-, b- ja c-merkkejä on kaikkia yhtä monta kappaletta.

   Vastaus: Kieli B_2 ei ole yhteydetön eikä siten myöskään säännöllinen. Sen tunnistaa seuraava Turingin kone:



(c) Kieli C_2 sisältää kaikki merkkijonot, joissa on a-merkkejä on vähintään yksi, b-merkkejä tasan yksi ja c-merkkejä enintään yksi.

Vastaus: Kieli C_2 on säännöllinen ja siten myös yhteydetön. Sen tunnistaa seuraava äärellinen automaatti:



Missään kielistä merkkien järjestyksellä ei ole väliä.

Mitkä kielistä ovat säännöllisiä? Entä yhteydettömiä? (Ei tarvitse todistaa.)

Anna kullekin kielelle sen tunnistava (deterministinen tai epädeterministinen) äärellinen automaatti, pinoautomaatti tai Turingin kone.

3. [*12 pistettä*] Esitä algoritmi, joka ratkaisee syötteenä annetusta yhteydettömästä kieliopista, tuottaako se ainakin yhden merkkijonon, jonka viimeinen merkki on a. Voit käyttää apuna mitä tahansa kurssilla esitettyjä algoritmeja.

Vastaus: Muodostetaan iteratiivisesti joukko X, johon tulee kaikki ne muuttujat, joista voidaan tuottaa jokin a:han päättyvä merkkijono.

(a) Muunna kielioppi Chomskyn normaalimuotoon.

(b) Alusta joukkoon X kaikki muuttujat A, joilla kielioppi sisältää säännön $A \to$ a.

(c) Toista seuraavaa, kunnes X ei enää muutu: Kaikilla kieliopin säännöillä $A \to BC$, missä $C \in X$, lisää muuttuja A joukkoon X (ellei se jo ole siellä).

(d) Jos lähtösymboli S on joukossa X, niin vastaa "kyllä", muuten vastaa "ei".

Itse asiassa Chomskyn normaalimuoto ei tässä ole mitenkään välttämätön, se vain helpottaa merkintöjä.

4. [*3+3+3+3 pistettä*]

(a) Kielistä A ja B tiedetään vain, että A on säännöllinen mutta $A \cap B$ ei ole. Voidaanko tällä perusteella päätellä, onko B säännöllinen?

Vastaus: Voidaan päätellä, että B ei ole säännöllinen. Jos B olisi säännöllinen, niin myös $A \cap B$ olisi, koska säännöllisten kielten luokka on suljettu leikkauksen suhteen.

(b) Kielistä A ja B tiedetään vain, että A on yhteydetön mutta $A \cap B$ ei ole. Voidaanko tällä perusteella päätellä, onko B yhteydetön?

Vastaus: Ei voida päätellä. Yhteydettömien kielten luokka ei tunnetusti ole suljettu leikkauksen suhteen eli on olemassa sellaiset yhteydettömät kielet A ja B, että $A \cap B$ ei ole yhteydetön. Toisaalta B voi luonnollisesti olla myös ei-yhteydetön.

(c) Kielistä A ja B tiedetään vain, että A ja $A \cup B$ ovat säännöllisiä. Voidaanko tällä perusteella päätellä, onko B säännöllinen?

Vastaus: Ei voida päätellä. Esimerkiksi, jos $A = \Sigma^*$, B voi olla mikä tahansa kieli.

(d) Kielistä A ja B tiedetään vain, että A ja $A \cup B$ ovat yhteydettömiä ja $A \cap B = \emptyset$. Voidaanko tällä perusteella päätellä, onko B yhteydetön?

Vastaus: Ei voida päätellä. Tunnetusti on olemassa yhteydettömiä kieliä, joiden komplementti ei ole yhteydetön. Jos A on tällainen kieli ja $B = \overline{A}$, niin kielet toteuttavat ehdot ja B ei ole yhteydetön. Toisaalta, B voi olla esimerkiksi tyhjä kieli, joka on yhteydetön.

Perustele kaikki vastauksesi. Voit käyttää apuna mitä tahansa kurssilla esitettyjä tuloksia.

5. [*6+6 pistettä*]

(a) Määrittele lyhyesti mutta täsmällisesti, mitä ovat luokat P, NP ja NP-täydellinen. Voit olettaa tunnetuksi erilaiset Turingin koneisiin yms. liittyvät peruskäsitteet.

Vastaus: Luokka P koostuu kielistä, jotka voidaan tunnistaa *deterministisellä* Turingin koneella, jonka aikavaativuus on polynominen (ts. on olemassa sellainen vakio k, että n merkkiä pitkällä syötteellä koneen tekemien laskenta-askelten lukumäärä on $\mathcal{O}(n^k)$). Luokka NP koostuu kielistä, jotka voidaan tunnistaa *epädeterministisellä* Turingin koneella, jonka aikavaativuus on polynominen. Luokka NP-täydellinen koostuu sellaisista luokan NP kielistä L, että mikä tahansa muu luokan NP kieli palautuu polynomisesti kieleen L.

(b) Anna esimerkki NP-täydellisestä ongelmasta. Esimerkki on kuvattava täsmällisesti, pelkkä nimi ei riitä. Mitä NP-täydellisyydestä seuraa tämän ongelman ratkaisemiselle käytännössä?

Vastaus: Esimerkiksi (suunnattu) Hamiltonin polku -ongelma:

Syöte: suunnattu verkko $G = (V, E)$, kaksi solmua $s \in V$ ja $t \in V$.

Kysymys: onko verkossa G polku, joka kulkee solmusta s solmuun t ja käy jokaisessa solmussa tasan kerran.

Ensinnäkin tämä ongelma kuuluu luokkaan NP eli voidaan ratkaista polynomisessa ajassa, jos epädeterminismi sallitaan (mutta tämä ei vastaa realistisia laskennan malleja). Toisekseen, ongelma kuuluu luokkaan P, jos ja vain jos P = NP. Siis pahimmassa tapauksessa polynomisessa ajassa toimivan deterministisen algoritmin löytäminen ongelmalle on tasan yhtä vaikeaa kuin todistaa P = NP (ja siis mahdotonta, jos todellisuudessa pätee P $\neq$ NP). Käytännössä ongelmaa voi yrittää ratkaista kohtuullisen kokoisilla syötteillä käyttäen ei-polynomisia algoritmeja tai esim. satunnaisalgoritmeja tai heuristisia algoritmeja, jotka eivät välttmättä löydä oikeaa ratkaisua.