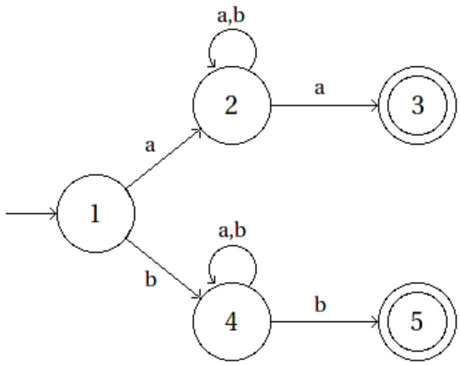
582206 Laskennan mallit (syksy 2009)
1. Kurssikoe 22.10. Ratkaisuja ja arvoste

Kokeen korjaajat ja ratkaisujen laatijat:

tehtävä 1: Antti Laaksonen
tehtävä 2: Topi Musto
tehtävä 3: Juha Kärkkäinen

1. [*4+3+3 pistettä*]

   (a) Kieli A koostuu vähintään kahden merkin pituisista merkkijonoista, joissa ensimmäinen merkki on sama kuin viimeinen merkki. Anna *sekä* kielen A tunnistava (deterministinen tai epädeterministinen) äärellinen automaatti *että* kieltä A esittävä säännöllinen lauseke.
   Vastaus: Kielen A tunnistava epädeterministinen äärellinen automaatti:

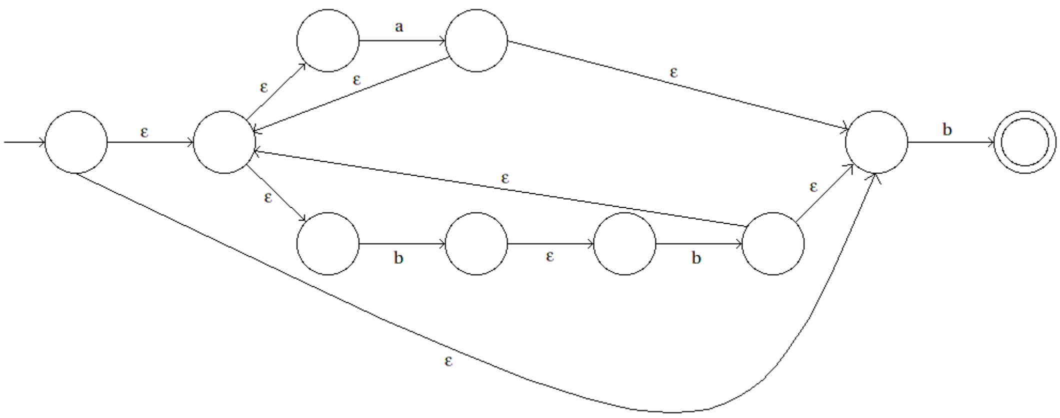


   Kieltä A esittävä säännöllinen lauseke: $a(a \cup b)^*a \cup b(a \cup b)^*b$.

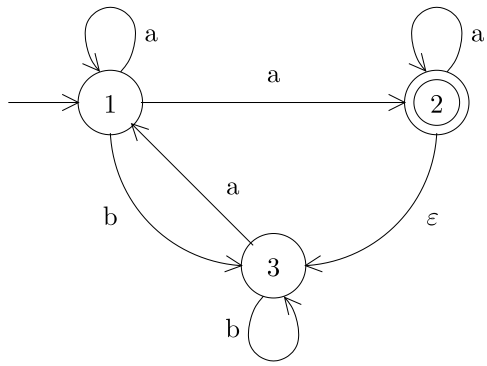
   (b) Muodosta säännöllisestä lausekkeesta

$$(a \cup bb)^*b$$

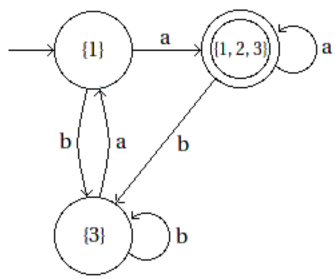
   epädeterministinen äärellinen automaatti kurssilla kuvatulla menetelmällä.
   Vastaus: Säännöllistä lauseketta vastaava epädeterministinen äärellinen automaatti:



(c) Muunna alla oleva epädeterministinen äärellinen automaatti deterministiseksi käyttäen kurssilla kuvattua menetelmää.



Vastaus: Automaattia vastaava deterministinen äärellinen automaatti:



Arvosteluperusteet:

- Kohdassa (a) automaatista sai 2 pistettä ja säännöllisestä lausekkeesta 2 pistettä.
- Kohdissa (b) ja (c) sai 3 pistettä, jos automaatti oli toimiva ja laadittu kurssin menetelmällä.
- Kohdissa (b) ja (c) mistä tahansa toimivasta automaatista sai ainakin 1 pisteen.
- Pienistä virheistä menetti 0–1 pistettä.

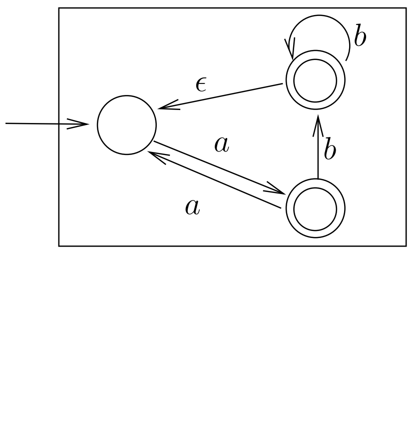
Yleisimmät virheet:

- Kohdassa (b) tai (c) automaattia ei ollut muodostettu kurssin menetelmällä.
- Kohdassa (b) oli käytetty (soveltaen) menetelmää, joka muuttaa automaatin säännölliseksi lausekkeeksi.
- Kohdassa (b) automaatti ei hyväksynyt merkkijonoa b.

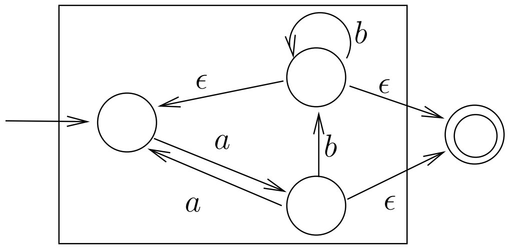
2. [*4 pistettä*] Miten mielivaltaisesta epädeterministisestä äärellisestä automaatista saadaan saman kielen tunnistava äärellinen automaatti, jossa on vain yksi hyväksyvä tila? Anna vastauksessasi lyhyt sanallinen ja kuvallinen selitys että täsmällinen matemaattinen konstruktio käyttäen epädeterministisen automaatin formaalia määritelmää.

   Vastaus:
   Lisätään automaattiin uusi hyväksyvä tila. Lisätään automaattiin ϵ-siirtymä kaikista hyväksyvistä tiloista uuteen lisättyyn tilaan ja muutetaan vanhat hyväksyvät tilat ei-hyväksyviksi.

   Eli esimerkiksi automaatti



muuntuisi muotoon



Ilmaistaan sama vielä tarkemmin. Eli olkoon annettu epädeterministinen automaatti $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, missä Q on äärellinen tilojen joukko, Σ on äärellinen aakkosto, kuvaus $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q)$ on siirtymäfunktio, $q_0 \in Q$ on alkutila, $F \subseteq Q$ on hyväksyvien tilojen joukko sekä $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Muodostetaan uusi epädeterministinen automaatti $M' = (Q \cup \{z\}, \Sigma, \delta', q_0, \{z\})$ missä z on kokonaan uusi tila (eli $z \notin Q$) ja samalla ainut hyväksyvä tila, alkutila ja aakkosto ovat samat kuin ennenkin ja siirtymäfunktio on kuvaus $\delta' : (Q \cup \{z\}) \times \Sigma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q \cup \{z\})$, jolle pätee

$$\begin{array}{lll} \delta'(q,\epsilon) & = \delta(q,\epsilon) \cup \{z\} & \text{kaikilla } q \in F, \\ \delta'(q,a) & = \delta(q,a) & \text{kaikilla } q \in F, a \in \Sigma, \\ \delta'(q,a) & = \delta(q,a) & \text{kaikilla } q \in Q \setminus F, a \in \Sigma_\epsilon \text{ ja} \\ \delta'(z,a) & = \emptyset & \text{kaikilla } a \in \Sigma_\epsilon. \end{array}$$

Tällöin selvästi $L(M') = L(M)$ ja uudessa automaatissa M' on vain yksi hyväksyvä tila.

Arvosteluperusteet:

- Sanallisesta ja kuvallisesta selityksestä sai varsin helposti 2p.
- Lisäksi oli mahdollista saada vielä formaalista konstruktiosta toiset 2p.
- Puutteista ja virheistä saattoi menettää pisteitä.
- Siirtymää $\delta'(z,a) = \emptyset$ ei tarvinnut kirjoittaa.
- Siirtymät pystyi kirjoittamaan hieman erilaisillakin tavoilla, mutta niistä oli erityisesti tultava myös ilmi, että vanhalla hyväksyvällä tilalla voi olla ϵ-siirtymiä jo ennestäänkin.

Yleisimmät virheet:

- Ei vastattu ollenkaan tai vastattiin täysin väärin.
- Ei muistettu, että hyväksyvällä tilalla voi olla jo valmiina joitain ϵ-siirtymiä.
- Siirtymäfunktiota ei osattu ilmaista pätevällä notaatiolla.
- Lähdettiin muodostamaan GNFA:ta korvaamalla kaaria säännöllisillä lausekkeilla. Tästä saattoi saada pisteen tai kaksikin, mikäli muunnoksen ensimmäinen vaihe (jossa lisätään *epsilon*-siirtymät uuteen lopputilaan, joka riittäisi vastaukseksi) oli selostettu kunnolla.
- Valittiin joku lopputiloista ainoaksi hyväksyväksi tilaksi. Tämä tuottaa välillä automaatin joka tunnistaa myös joitain ylimääräisiä merkkijonoja (sanallisesta osuudesta sai tällä vastauksella yhden pisteen).

3. [*4+2+4 pistettä*]

   (a) Ilmoita, mitkä seuraavista kielistä ovat säännöllisiä ja mitkä ei-säännöllisiä:

$$A_1 = \{\, a^n b^m a^n \mid m, n \in \mathbb{N} \,\} \qquad A_3 = \{\, a^n a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N} \,\}$$
$$A_2 = \left\{\, a^k b^m a^n \mid k, m, n \in \mathbb{N} \,\right\} \qquad A_4 = \{\, a^n a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N} \,\}$$

   Vastaus: A_2 ja A_3 ovat säännöllisiä, A_1 ja A_4 ovat ei-säännöllisiä.

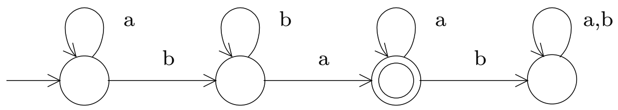
   Arvostelu: Piste kustakin oikein luokitellusta kielestä.

(b) Valitse yksi (a)-kohdan säännöllisistä kielistä ja osoita, että se on säännöllinen.

Vastaus: A_2 on säännöllinen, koska se voidaan esittää säännöllisellä lausekkeella $a^*b^*a^*$. Vastaavasti $A_3 = (aa)^*b^*$.

Arvostelu:

- Oikea periaate eli säännöllisyyden todistus esittämällä säännöllinen lauseke tai äärellinen automaatti antaa yhden pisteen.
- Toinen piste tulee, jos automaatti tai lauseke on oikein.
- Pieni virhe vähentää puoli pistettä.
- Mallivastauksissa on oletettu, että $0 \in \mathbb{N}$, mutta vastauksissa on hyväksytty myös oletus $0 \notin \mathbb{N}$. Sekamuoto ei kuitenkaan käy. Tyypillinen puolen pisteen virhe on seuraavan kaltainen DFA kielelle A_2:



  Tämä automaatti tunnistaa kielen $a^*b^+a^+$. (Oikein olisi kielen $a^*b^*a^*$ tai $a^+b^+a^+$ tunnistava DFA.)
- Pumppautuvuus ei todista säännöllisyyttä ja siihen perustuvista vastauksista ei saa pisteitä.

(c) Valitse yksi (a)-kohdan ei-säännöllisistä kielistä ja osoita, että se ei ole säännöllinen.

Vastaus: Valitaan A_1. Tehdään vastaoletus, että A_1 on säännöllinen. Pumppauslemman nojalla A_1 on tällöin p-pumppautuva jollakin p. Valitaan $s = a^pba^p \in A_1$. Koska $|s| \geq p$, se on p-pumppautuva eli on olemassa jako $s = xyz$, joka toteuttaa:

i. $xy^iz \in A_1$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$,

ii. $|y| > 0$, ja

iii. $|xy| \leq p$.

Ehtojen (ii) ja (iii) perusteella täytyy olla $x = a^j$, $y = a^k$ ja $z = a^{p-j-k}ba^p$ joillakin sellaisilla j ja k, että $j + k \leq p$ ja $k > 0$. Ehdon (i) perusteella $xyyz = a^{p+k}ba^p$ kuuluu kieleen A_1. Tämä on ristiriita kielen A_1 määritelmän kanssa, mikä tarkoittaa, että vastaoletus on väärä eli A_1 ei ole säännöllinen.

Kielellä A_4 kannattaa valita $s = a^pb^p$ ($n = p$ ja $m = 0$) ja pumpata alaspäin ($xy = a^{p-k}b^p \notin A_4$).

Arvostelu:

- 4 pistettä sai (lähes) täysin oikeasta vastauksesta.
- 3 pistettä sai pääosin oikeasta vastauksesta, jossa on kuitenkin jokin merkittävä virhe tai puute.
- 2 pistettä sai, jos merkittäviä virheitä tai puutteita on useampi, mutta oikeaakin on selvästi enemmän kuin 1 pisteen vastauksessa.
- 1 pistettä sai, jos vastauksessa on oikein perusperiaate (eli todistetaan ei-säännöllisyys todistamalla ei-pumppautuvuus) mutta ei paljon muuta.
- Myös puolikkaat pisteet ovat käytössä rajatapauksissa.
- Puoli pistettä sai vastauksista, joissa vedottiin siihen, että kielen tunnistava automaatti tarvitsisi äärettömän määrän tiloja tai äärettömästi muistia. (Ei-säännöllisyyden täsmällinen osoittaminen tällä periaatteella on mahdollista mutta vaikeaa.)
- Yleisiä pisteen suuruisia virheitä:
  - Tarkasteltu liian suppeaa joukkoa jakoja $s = xyz$, esimerkiksi vain jakoja $x = a^{p-k}$, $y = a^k$ ja $z = ba^p$ tai vain jakoa $x = \varepsilon$, $y = a^p$ ja $z = ba^p$.
  - Kielen A_4 tapauksessa valittu $s = a^pa^mb^p$ tai pumpattu ylöspäin.