582206 Laskennan mallit (syksy 2009)

2. Kurssikoe 17.12. Ratkaisuja ja arvosteluperusteet

Kokeen korjaajat ja ratkaisujen laatijat:

tehtävä 1: Topi Musto
tehtävä 2: Antti Laaksonen
tehtävä 3: Juha Kärkkäinen

1. [*2+2+2+2 pistettä*] Kaikissa tehtävän kohdissa aakkosto on $\{ a, b \}$.

   (a) Anna yhteydetön kielioppi kielelle $\{ a^n b^m a^n \mid n, m \geq 0 \}$.

   (b) Anna yhteydetön kielioppi säännöllisen lausekkeen $(a \cup ba)^* b$ esittämälle kielelle.

   (c) Muunna seuraava yhteydetön kielioppi vastaavaksi pinoautomaatiksi. Jos käytät jotain muuta kuin kurssilla kuvattua menetelmää, niin perustele tuloksen oikeellisuus.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & Ab \mid aA \\ A & \rightarrow & aSa \mid \varepsilon \end{array}$$

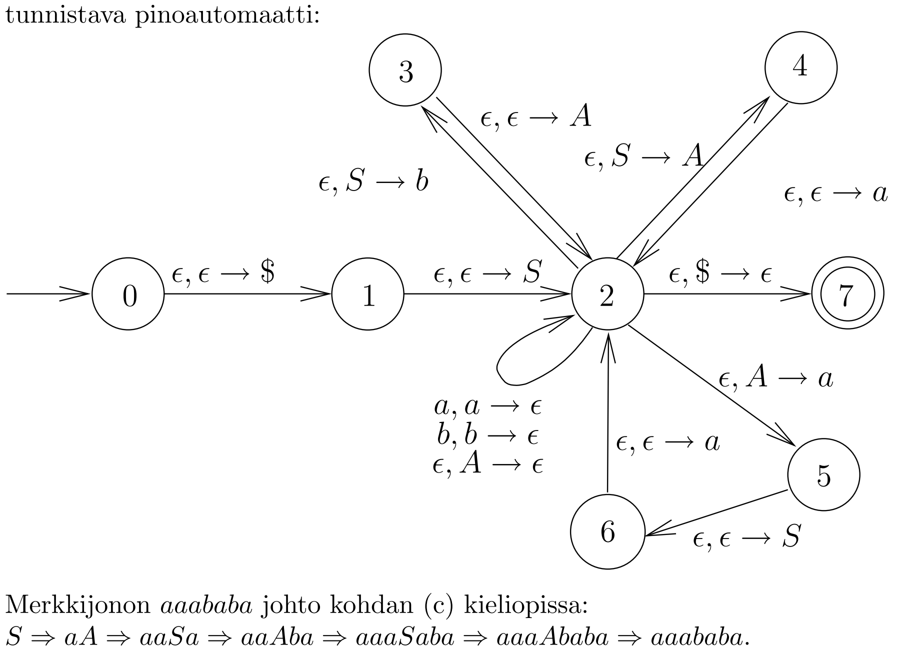
   (d) Anna merkkijonon aaababa johto kohdan (c) kieliopissa. Simuloi myös muodostamasi pinoautomaatin hyväksyvä laskenta samalla syötteellä (esim. näyttämällä pinon tilanteet).

Vastaus:

(a) Eräs yhteydetön kielioppi kielelle $\{ a^n b^m a^n \mid n, m \geq 0 \}$:
$S \rightarrow aSa \mid B$
$B \rightarrow bB \mid \epsilon$.

(b) Eräs yhteydetön kielioppi säännöllisen lausekkeen $(a \cup ba)^* b$ esittämälle kielelle:
$S \rightarrow aS \mid baS \mid b$

(c) Yhteydettömän kieliopin
$S \rightarrow Ab \mid aA$
$A \rightarrow aSa \mid \epsilon$
tunnistava pinoautomaatti:



(d) Merkkijonon *aaababa* johto kohdan (c) kieliopissa:
$S \Rightarrow aA \Rightarrow aaSa \Rightarrow aaAba \Rightarrow aaaSaba \Rightarrow aaaAbaba \Rightarrow aaababa$.
Muodostetun pinoautomaatin laskenta samalla syötteellä:

Pino	Tila	Syöte
	0	$aaababa$
$\$$	1	$aaababa$
$\$S$	2	$aaababa$
$\$A$	4	$aaababa$
$\$Aa$	2	$aaababa$
$\$A$	2	$aababa$
$\$a$	5	$aababa$
$\$aS$	6	$aababa$
$\$aSa$	2	$aababa$
$\$aS$	2	$ababa$
$\$ab$	3	$ababa$
$\$abA$	2	$ababa$
$\$aba$	5	$ababa$
$\$abaS$	6	$ababa$
$\$abaSa$	2	$ababa$
$\$abaS$	2	$baba$
$\$abab$	3	$baba$
$\$ababA$	2	$baba$
$\$abab$	2	$baba$
$\$aba$	2	aba
$\$ab$	2	ba
$\$a$	2	a
$\$$	2	
	7	

Arvostelusta:

- Jokaisesta kohdasta sai 2 pistettä.
- Tehtävät oli osattu hyvin.
- Kohdassa (d) kelpasi johdon sijasta myös jäsennyspuu.
- Kohdassa (d) ei tarvinnut merkitä automaatin tiloja ja joitain väliaskeleita sai ohittaa.
- Kohdassa (b) moni teki kieliopin lausekkeelle $(a^* \cup (ba)^*)b$ eikä sille mitä kysyttiin.

2. [*2+2+2+2 pistettä*] Selitä, mitä tarkoitetaan seuraavilla käsitteillä (vain alleviivattu osa tarvitsee selittää; muun osan voit olettaa tunnetuksi):

   (a) <u>moniselitteinen</u> yhteydetön kielioppi

   (b) <u>NP-täydellinen</u> kieli.

   Anna esimerkki kummastakin käsitteestä. Esimerkit tulee kuvata täsmällisesti; siis esim. pelkkä nimi ei riitä. Esimerkin oikeellisuutta ei tarvitse todistaa.

   Vastaus:

   (a) Yhteydetön kielioppi on moniselitteinen, jos jollakin sen tuottamalla merkkijonolla on monta erilaista vasenta johtoa eli monta erilaista jäsennyspuuta.

   Esimerkiksi seuraava kielioppi on moniselitteinen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid \mathrm{a} \\ A &\rightarrow \mathrm{a} \end{aligned}$$

   Merkkijonolla a on nyt kaksi erilaista vasenta johtoa:

$$S \Rightarrow a$$
$$S \Rightarrow A \Rightarrow a$$

(b) Kieli on NP-täydellinen, jos se kuuluu luokkaan NP ja mikä tahansa luokkaan NP kuuluva kieli palautuu siihen polynomisesti. Kieli kuuluu luokkaan NP, jos se voidaan tunnistaa polynomisessa ajassa epädeterministisellä Turingin koneella.

Esimerkiksi SAT-kieli on NP-täydellinen. Tämä kieli sisältää kaikki propositiologiikan kaavat, jotka ovat tosia, kunhan muuttujien arvot valitaan sopivasti.

Arvostelusta:

- Molemmissa kohdissa määritelmästä sai 2 pistettä ja esimerkistä sai 2 pistettä.
- Kohtaan (a) tuli paljon hyviä vastauksia.
- Kohdassa (b) moni määritteli NP-kielen eikä NP-täydellisen kielen.

3. [*2+2+2+2 pistettä*] Mitkä seuraavista väittämistä ovat tosia ja mitkä epätosia? Perustele vastauksesi. (Yksi piste per oikea totuusarvo; toinen piste pätevästä perustelusta).

(a) On olemassa algoritmi, joka ratkaisee mille tahansa Turingin koneelle M ja merkkijonolle w, pysähtyykö M syötteellä w.

(b) On olemassa algoritmi, joka ratkaisee mille tahansa Turingin koneelle M, pysähtyykö M, kun se saa syötteekseen tyhjän merkkijonon.

(c) On olemassa sellainen Turingin kone M, että mikään algoritmi ei pysty ratkaisemaan, pysähtyykö M annetulla syötteellä w.

(d) On olemassa sellainen Turingin kone M, että mikään algoritmi ei pysty ratkaisemaan, pysähtyykö M, kun se saa syötteekseen tyhjän merkkijonon.

Tehtävässä oletetaan, että Churchin–Turingin teesi pätee. Voit käyttää mitä tahansa kurssilla osoitettuja tuloksia.

Vastaus:

(a) Väite on epätosi. Tällainen algoritmi ratkaisisi Turingin koneiden pysähtymisongelman $HALT_{\mathrm{TM}}$, joka luennolla on osoitettu ratkeamattomaksi.

(b) Väite on epätosi. Tällaisen algoritmin avulla voisimme ratkaista pysähtymisongelman seuraavasti: Muodostetaan annetusta Turingin koneesta M ja syötteestä w uusi Turingin kone M_w, joka ensin kirjoittaa merkkijonon w nauhalleen ja sen jälkeen toimii kuten M. Tällöin M_w pysähtyy tyhjällä syötteellä, jos ja vain jos M pysähtyy syötteellä w.

(c) Väite on tosi. Esimerkiksi universaali Turingin kone U toteuttaa väitteen. Jos olisi algoritmi, joka ratkaisee pysähtyykö U annetulla syötteellä, voisimme ratkaista pysähtymisongelman testaamalla pysähtyykö U syötteellä $\langle M, w\rangle$.

Itse asiassa jokainen Turingin kone M, joka tunnistaa jonkin tunnistettavan mutta ratkeamattoman kielen L, toteuttaa väitteen. Jos jokin algoritmi A_M ratkaisisi, pysähtyykö M annetulla syötteellä, voisimme ratkaista myös, kuuluuko w kieleen L seuraavasti:

1. Testaa algoritmin A_M avulla, pysähtyykö M syötteellä w. Jos ei pysähdy, hylkää w.
2. Suorita M syötteellä w ja hyväksy w, jos M hyväksyi sen, ja hylkää, jos M hylkäsi sen.

(d) Väite on epätosi. Jokainen Turingin kone joko pysähtyy tyhjällä syötteellä tai ei pysähdy. Ongelman ratkaisee ensimmäisessä tapauksessa algoritmi, joka aina vastaa kyllä, ja toisessa tapauksessa algoritmi, joka aina vastaa ei.

Arvostelusta:

- Kuten tehtävänannossa sanottiin, kustakin oikeasta totuusarvosta ja kustakin pätevästä perustelusta sai pisteen.
- (a)-kohdan totuusarvo oli oikein lähes kaikilla ja perustelukin useimmilla.
- Myös (b)- ja (c)-kohdissa totuusarvo oli usein oikein, mutta pätevä perustelu oli vain harvoilla. Joissakin vastauksissa vedottiin siihen, että kyseessä on pysähtymisongelman erikoistapaus, mutta yleisen ongelman ratkeamattomuus ei kuitenkaan automaattisesti tarkoita erikoistapauksen ratkeamattomuutta.
- (d)-kohta oli useimmilla väärin.