## Ei-säännöllisiä kieliä [Sipser luku 1.4]

Osoitamme, että jotkut kielet eivät ole säännöllisiä eli niitä ei voi tunnistaa äärellisellä automaatilla.

Tulos ei sinänsä ole erityisen yllättävä, koska äärellinen automaatti on hyvin yksinkertainen laskennan malli. Ei kuitenkaan ole ilmeistä, miten annetusta kielestä osoitetaan, että *mikään* äärellinen automaatti ei tunnista sitä.

Ei-säännöllisyyttä ei välttämättä näe suoraan: esim. kieli

$$C = \{\, w \in \{\, 0, 1 \,\}^* \mid w \text{ sisältää yhtä monta nollaa ja ykköstä} \,\}$$

ei ole säännöllinen (kuten pian näemme). Toisaalta

$$D = \{\, w \in \{\, 0, 1 \,\}^* \mid w\text{:ssä esiintyy 01 ja 10 yhtä monta kertaa} \,\}$$

itse asiassa *on* säännöllinen.



Tyypillinen ei-säännöllisyystodistus perustuu johonkin ominaisuuteen, joka jokaisella säännöllisellä kielellä (todistettavasti) on. Jos tarkasteltavalla kielellä *ei ole* tätä ominaisuutta, se ei ole säännöllinen.

Olemme jo nähneet, että jokainen säännöllinen kieli on tunnistettavissa DFA:lla ja NFA:lla sekä esitettävissä säännöllisenä lausekkeena. Seuraavaksi osoitamme, että jokainen säännöllinen kieli on *pumppautuva*.

Muista edellä mainituista ominaisuuksista poiketen myös jotkin ei-säännölliset kielet ovat pumppautuvia. Todistus toimii siis vain toiseen suuntaan:

$$\text{säännöllinen} \implies \text{pumppautuva}$$

Pumppautuvuudella ei siis voi todistaa kielen säännöllisyyttä, mutta sillä voi todistaa ei-säännöllisyyden koska pätee myös:

$$\text{ei-pumppautuva} \implies \text{ei-säännöllinen}$$



**Määritelmä 1.16:** Olkoon $L \in \Sigma^*$ kieli ja $p$ jokin luku. Määrittelemme $p$-*pumppautuvuuden* seuraavasti:

- Merkkijonokolmikko $x, y, z \in \Sigma^*$ on $p$-pumppautuva kielessä $L$, jos
  1. $xy^iz \in L$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$,
  2. $|y| > 0$, ja
  3. $|xy| \leq p$.
- Merkkijono $s$ on $p$-pumppautuva kielessä $L$, jos on olemassa $p$-pumppautuva kolmikko $x, y, z \in \Sigma^*$, jolla $s = xyz$.
- Kieli $L$ on $p$-pumppautuva, jos jokainen $s \in L$, jolla $|s| \geq p$, on $p$-pumppautuva.

Kieli $L$ on *pumppautuva*, jos se on $p$-pumppautuva jollakin $p$. Tällöin $p$ on kielen $L$ *pumppauspituus*. □

**Lause 1.17 (Pumppauslemma):** [Sipser Thm. 1.70]
Jokainen säännöllinen kieli on pumppautuva.



Ennen pumppauslemman todistusta, tarkastellaan pumppautuvuuden merkitystä epämuodollisemmin.

Kolmikon $x, y, z$ pumppautuvuusehto (1) tarkoittaa, että kieli $L$ sisältää merkkijonot $xz$, $xyz$, $xyyz$, $xyyyz$, ... Ehdosta (2) seuraa, että nämä jonot ovat toinen toistaan pidempiä. Siis $y$:tä "pumppaamalla" saadaan rajattomasti uusia kieleen kuuluvia merkkijonoja.

Jos merkkijono $s$ on pumppautuva, se kuuluu kieleen $L$ (koska $s = xy^1z$). Lisäksi se sisältää *osajonon* $y$, jonka *poistaminen* tai *monistaminen* tuottaa uusia kielen $L$ merkkijonoja. Kolmikon pumppautuvuusehdon (3) nojalla tämä osajono $y$ löytyy jonon $s$ alkuosasta, jonka pituus on $p$.

Kielen $L$ pumppautuvuus tarkoittaa, että jokainen *tarpeeksi pitkä* kieleen kuuluva merkkijono on pumppautuva.

Äärellisellä kielellä voidaan (ja täytyy) valita pumppauspituus $p$, joka on suurempi kuin kielen pisimmän merkkijonon pituus. Tällöin kielessä ei siis ole yhtään tarpeeksi pitkää merkkijonoa.

Katsotaan vielä esimerkki ei-säännöllisyystodistuksesta pumppauslemman avulla.

**Esimerkki 1.18:** Kieli

$$B = \{\, 0^n 1^n \mid n \in N \,\}$$

ei ole säännöllinen.

Väitteen todistamiseksi tehdään *vastaoletus*, että $B$ on säännöllinen. Tällöin $B$ on $p$-pumppautuva jollakin $p$.

Valitaan $s = 0^p 1^p$. Koska $|s| \geq p$, se on $p$-pumppautuva, eli $s = xyz$ jollakin $p$-pumppautuvalla $x, y, z$.

Koska $|xy| \leq p$ ja $|y| > 0$ , täytyy olla $y = 0^k$ jollakin $k > 0$.

Nyt mm. $xy^2z = 0^{p+k}1^p$ kuuluu kieleen $B$.

Tämä on *ristiriita* kielen $B$ määritelmän kanssa. □



**Pumppauslemman todistus:** Olkoon $A$ säännöllinen kieli ja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sen tunnistava DFA. Valitaan $p = |Q|$.

Olkoon nyt $n \geq p$ ja $s = s_1 \dots s_n \in A$. Olkoon $r_0, \dots, r_n$ tilajono, jonka kautta $M$ hyväksyy merkkijonon $s$, ts. $r_0 = q_0$, $r_{i+1} = \delta(r_i, s_{i+1})$ kun $i = 0, \dots, n-1$, ja $r_n \in F$. Laskentapolku syötteellä $s$ on siis

$$r_0 \xrightarrow{s_1} r_1 \xrightarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s_p} r_p \xrightarrow{s_{p+1}} \dots \xrightarrow{s_n} r_n \; .$$

Jonossa $r_0, \dots, r_p$ on $p+1$ tilaa, mutta automaatissa $M$ on vain $p$ tilaa, joten jokin tila esiintyy jonossa kahteen kertaan (kyyhkyslakkaperiaate). Olkoon $r_j = r_k$, missä $j < k \leq p$.

Jaetaan $s$ osiin $s = xyz$, missä

$$\begin{aligned} x &= s_1 \dots s_j \\ y &= s_{j+1} \dots s_k \\ z &= s_{k+1} \dots s_n. \end{aligned}$$

Koska $|y| = k - j > 0$ ja $|xy| = k \leq p$, tämä täyttää pumppautuvuusmääritelmän ehdot (2) ja (3).



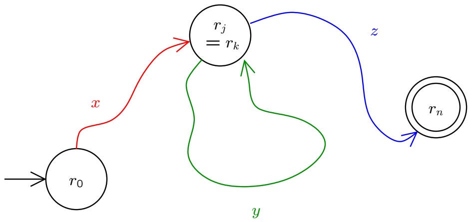
Automaatin $M$ laskenta syötteellä $s$ on siis

$$r_0 \xrightarrow{s_1} r_1 \xrightarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s_j} r_j \xrightarrow{s_{j+1}} \dots \xrightarrow{s_k} r_k \xrightarrow{s_{k+1}} \dots \xrightarrow{s_n} r_n,$$

jota merkitsemme lyhyemmin (ja huomioiden, että $r_j = r_k$)

$$r_0 \overset{x}{\rightsquigarrow} r_j \overset{y}{\rightsquigarrow} r_j \overset{z}{\rightsquigarrow} r_n.$$

Tämä tarkoittaa, että laskentapolku tekee silmukan:




Tästä näemme, että hyväksyviä laskentapolkuja automaatissa $M$ ovat myös

$$r_0 \overset{x}{\rightsquigarrow} r_j \overset{z}{\rightsquigarrow} r_n, \quad r_0 \overset{x}{\rightsquigarrow} r_j \overset{y}{\rightsquigarrow} r_j \overset{y}{\rightsquigarrow} r_j \overset{z}{\rightsquigarrow} r_n \quad \text{ja} \quad r_0 \overset{x}{\rightsquigarrow} r_j \overset{y}{\rightsquigarrow} r_j \overset{y}{\rightsquigarrow} r_j \overset{y}{\rightsquigarrow} r_j \overset{z}{\rightsquigarrow} r_n \quad \text{jne.}$$

Siten automaatti hyväksyy jonot $xz$, $xyz$, $xyyz$, $xyyyz$, $\dots$ eli $xy^iz \in A$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Siis myös pumppautuvuusehto (1) on voimassa. □



## Pumppauslemman soveltaminen

Jos kieli $A$ on pumppautuva, niin määritelmän mukaan

**on olemassa** sellainen $p$, että
**kaikilla** sellaisilla $s \in A$, että $|s| \geq p$,
**on olemassa** jako $s = xyz$, jolla pumppautuvuusehdot (1)–(3) toteutuvat.

Käytämme pumppauslemmaa yleensä käänteisesti: todistamme kielen $A$ ei-säännölliseksi osoittamalla, että $A$ ei ole pumppautuva. Tätä varten pitää siis voida osoittaa, että

**kaikilla** $p$
**on olemassa** sellainen $s \in A$, että $|s| \geq p$ ja
**kaikilla** jaoilla $s = xyz$ jokin pumppautuvuusehdoista (1)–(3) jää toteutumatta.

Siis aluksi $s$ voidaan valita sopivasti helpottamaan todistusta, mutta sitten pitää käydä läpi kaikki mahdolliset tavat jakaa $s$ osiin $x$, $y$ ja $z$ ja osoittaa, että mikään jako ei toteuta kaikkia pumppausehtoja.

**Esimerkki 1.19:** [Sipser Ex. 1.74] Kieli

$$C = \{ w \in \{ 0, 1 \}^* \mid w \text{ sisältää yhtä monta nollaa ja ykköstä} \}$$

ei ole säännöllinen.

Todistamme tämän osoittamalla, että kieli $C$ ei ole pumppautuva. Pumppauslemman nojalla tästä seuraa, että $C$ ei ole säännöllinen.

Olkoon siis $p \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Meidän on löydettävä ainakin yksi sellainen merkkijono $s \in C$, että $|s| \geq p$ mutta mikään jako $s = xyz$ ei toteuta kaikkia pumppautuvuusehtoja (1)–(3).

Tässä toimivaksi valinnaksi osoittautuu $s = 0^p 1^p$. Tällä valinnalla selvästi $s \in C$ ja $|s| \geq p$. Pitää vielä osoittaa, että *mikään* tapa jakaa $s$ osiin $s = xyz$ ei toteuta kaikkia ehtoja (1)–(3).

Ainoa tapa saada ehto (3) voimaan on valita $x = 0^n$ ja $y = 0^m$, missä $n + m \leq p$. Jäljelle jää $z = 0^{p-m-n} 1^p$. Tällöin $xyyz = 0^n 0^m 0^m 0^{p-m-n} 1^p = 0^{p+m} 1^p$. Jos $m > 0$, tämä merkkijono ei kuulu kieleen $C$, mikä rikkoo ehtoa (1). Jos taas $m = 0$, ehto (2) ei ole voimassa.

Siis mikään jako ei toteuta kaikkia ehtoja. Merkkijono $s = 0^p 1^p$ ei ole $p$-pumppautuva, joten $p$ ei ole kielen $C$ pumppauspituus *millään* $p$. □



*Vaihtoehtoinen todistus:* Tehdään vastaoletus, että $C$ on säännöllinen. Kieli $0^*1^*$ on säännöllinen, joten kieli $(0^*1^*) \cap C$ on säännöllinen (harjoitus 4). Tämä on ristiriita, koska $(0^*1^*) \cap C$ on sama kuin esimerkin 1.18 ei-säännöllinen kieli $B$. □

Huomautus 1: Pumppauslemma ei siis ole ainoa tapa todistaa kieli ei-säännölliseksi. On olemassa myös *ei-säännöllisiä*, *pumppautuvia* kieliä, joten niiden ei-säännöllisyys pitää todistaa muuta kautta.

Jos kieli ei ole pumppautuva, se ei ole säännöllinen. Jos kieli on pumppautuva, sen säännöllisyydestä ei vielä voi tehdä mitään päätelmiä.



*Huomautus 2:* Miten valitaan sopiva $s$? Jos olisi valittu $s = (01)^p$, ei olisi saatu ristiriitaa, koska tätä $s$ *voidaan* pumpata (esim. $x = \varepsilon$, $y = 01$, $z = (01)^{p-1}$).

Yksi lähestymistapa on miettiä, mitkä olisivat *hankalia tapauksia*, jos kieltä yritettäisiin tunnistaa äärellisellä automaatilla.

Jos haluamme päättää, päteekö $s \in C$, ja saamme käydä merkkijonon $s$ läpi vain kerran, niin intuitiivisesti meidän täytyy pitää kirjaa siitä, mikä on tähän mennessä nähtyjen nollien ja ykkösten lukumäärän ero. Tämä on mahdotonta äärellisellä automaatilla, koska $p$-tilaisessa automaatissa ei voi esittää yli $p$:n meneviä laskurin arvoja.

Merkkijono $s = 0^p 1^p$ on valittu siten, että se aiheuttaa "laskurin ylivuodon" mahdollisimman nopeasti.



**Esimerkki 1.20:** [Sipser Ex. 1.75] Kieli $F = \{ ww \mid w \in \{ 0, 1 \}^* \}$ ei ole säännöllinen.

Todistuksen logiikka on sama kuin edellä, mutta esitämme sen hieman tiiviimmin.

Tehdään *vastaoletus*, että kieli $F$ on säännöllinen. Siis sillä on pumppauspituus $p$. Valitaan $s = 0^p 1 0^p 1 \in F$.

Olkoon $s = xyz$, missä $|y| > 0$ ja $|xy| \leq p$ (pumppautuvuusehdot (2) ja (3)). Siis $y = 0^k$ jollain $k > 0$. Nyt $xyyz = 0^{p+k} 1 0^p 1$. Tämän merkkijonon loppupuoliskossa on ykkösiä mutta alkupuoliskossa ei, joten se ei kuulu kieleen $F$. Siis pumppautuvuusehto (1) ei toteudu; *ristiriita*. □

Edellisiä esimerkkejä yhdistää idea, että äärellinen automaatti ei osaa todeta kahta asiaa yhtäsuuriksi. Samaan intuitioon liittyy edellä esitetty "laskurin ylivuoto" -idea.

Tässä kuitenkaan esim. valinta $s = 0^p 0^p$ ei sellaisenaan toimisi, koska $0^{p+k} 0^p$ kuuluukin kieleen: $0^{p+k} 0^p = 0^{p+k/2} 0^{p+k/2}$ (jos $k$ on parillinen).

Tarvitaan pieni trikki, jolla kiinnitetään jako "alkupuoliskoon" ja "loppupuoliskoon".

**Esimerkki 1.21:** [Sipser Ex. 1.76] Kieli $D = \left\{ 1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ ei ole säännöllinen.

Kieli siis koostuu ykkösjonoista, joiden pituudet ovat

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad \ldots.$$

Havaitaan, että perättäisten pituuksien väliset aukot kasvavat. Tarkemmin alkioiden $r$ ja $r+1$ pituuksien väli on

$$r^2 - (r-1)^2 = 2r - 1.$$

Siis alkion $r = \lfloor (k+3)/2 \rfloor$ jälkeen jonojen pituus poikkeaa enemmän kuin $k$:n verran kaikista muista jonoista.

Tehdään nyt *vastaoletus:* kieli $D$ on säännöllinen. Olkoon pumppauspituus $p$. Valitaan mikä tahansa $s \in D$, jolla $|s| \geq p$, ja tälle pumppautuvuuden mukainen esitys $s = xyz$. Olkoon $|y| = k \geq 1$ ja $|xz| = l$. Nyt merkkijonot $xy^iz$ kuuluvat kieleen $D$, ja niiden pituudet muodostavat aritmeettisesti kasvavan jonon

$$l, \quad l+k, \quad l+2k, \quad l+3k, \quad \ldots.$$

Tällöin kielessä $D$ on ääretön määrä merkkijonoja, joiden pituus poikkeaa tasan $k$:n verran toisesta jonosta. Tämä on *ristiriita* aiemman havainnon kanssa. $\square$



**Esimerkki 1.22:** [Sipser Ex. 1.77] Kieli $E = \left\{ 0^i 1^j \mid i > j \right\}$ ei ole säännöllinen.

*Vastaoletus:* Oletetaan, että $E$ on säännöllinen. Olkoon sillä pumppauspituus $p$.

Valitaan $s = 0^{p+1}1^p \in E$. Olkoon $s = xyz$ pumppautuvuusehdon mukaisesti. Taas ehtojen $|y| > 0$ ja $|xy| \leq p$ vuoksi $y = 0^k$ jollain $k \geq 1$. Nyt $xy^0z = xz = 0^{p+1-k}1^p \notin E$; *ristiriita*. $\square$

Tässä siis "pumpattiin alaspäin" eli imettiin $s$:stä viimeinenkin $y$ pois.



## Vaihtoehtoinen tulkinta pumppautuvuudelle

Ajatellaan tilanne pelinä, jonka osapuolina ovat pelaajat K ("kyllä") ja E ("ei"). K yrittää todistaa, että kieli $L$ on pumppautuva. E yrittää todistaa, että kieli $L$ ei ole pumppautuva.

1. K valitsee luvun $p$ (ja väittää, että se on kielen $L$ pumppauspituus).

2. E valitsee kielestä $L$ merkkijonon $s$, jonka pituus on vähintään $p$ (ja väittää, että $s$ ei ole $p$-pumppautuva).

3. K valitsee jaon $s = xyz$, jolla on voimassa ehdot (2) $|y| > 0$ ja (3) $|xy| \leq p$ (ja väittää, että kolmikko $x, y, z$ on $p$-pumppautuva).

4. E valitsee luvun $i \in \mathbb{N}$, jolla $xy^iz \notin L$ (osoittaen, että $x, y, z$ ei ole $p$-pumppautuva).

Pelin häviää se pelaaja, joka ensin rikkoo sääntöjä. Jos peli menee läpi ilman sääntörikkomusta, voittaja on viimeisen laillisen siirron tekijä E.



Olettaen, että molemmat pelaajat ovat *kaikkitietäviä* ja *virheettömiä*, pelin lopputulos kertoo, onko kieli $L$ pumppautuva vai ei.

*Voittostrategia* on algoritmi, jota noudattamalla pelaaja voittaa, teki vastustaja mitä hyvänsä. Voimme osoittaa, että kieli on pumppautuva, antamalla voittostrategian pelaajalle K. Vastaavasti voittostrategia pelaajalle E osoittaa, että kieli ei ole pumppautuva.

Jos pelaajalla ei ole voittostrategiaa, hän joutuu jossakin vaiheessa rikkomaan sääntöjä tai "bluffaamaan". Aukotonta voittostrategiaa ei bluffaamalla voi kuitenkaan päihittää.

**Esimerkki 1.23:** Pumppauslemman todistus antaa voittostrategian pelaajalle K, kun kieli $L$ on säännöllinen:

1. K muodostaa kielen $L$ tunnistavan DFA:n $M$ ja valitsee $p$:ksi $M$:n tilojen lukumäärän. (Oletamme K:n kaikkitietäväksi eli hän pystyy löytämään automaatin $M$, jos sellainen on olemassa.)

2. E valitsee merkkijonon $s \in L$, jolla $|s| \geq p$. Äärellisellä kielellä tällaista merkkijonoa ei ole ja E häviää jo tässä vaiheessa.

3. K laskee automaatin $M$ laskentapolun syötteellä $s$ ja etsii siitä ensimmäisen toistuvan tilan $r$. K muodostaa jaon $s = xyz$ siten, että $x$ päättyy ensimmäiseen vierailuun tilassa $r$ ja $y$ päättyy toiseen vierailuun tilassa $r$. Pumppauslemman todistuksessa osoitettiin, että näin valittu jako täyttää ehdot (2) $|y| > 0$ ja (3) $|xy| \leq p$.

4. E valitsee luvun $i \in \mathbb{N}$. Pumppauslemmassa osoitettiin, että valinnasta riippumatta $xy^iz \in L$ eli E rikkoo sääntöjä ja häviää viimeistään nyt.

Tämän voittostrategian olemassaolo siis osoittaa, että jokainen säännöllinen kieli on pumppautuva. □



**Esimerkki 1.24:** Osoitamme (jälleen), että kieli $B = \{\, 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ ei ole pumppautuva, antamalla voittostrategian pelaajalle E:

1. K valitsee luvun $p$. (Koska $B$:llä ei ole pumppauspituutta, K joutuu bluffaamaan.)

2. E valitsee $s = 0^p 1^p$.

3. K valitsee jaon $s = xyz$, missä $y = 0^k$ jollakin $k > 0$. Muu valinta rikkoo ehtoa (2) $|y| > 0$ tai ehtoa (3) $|xy| \leq p$ ja aiheuttaa häviön.

4. E valitsee $i = 2$, jolloin $xy^iz = 0^{p+k} 1^p \notin L$ eli E voittaa.

Tästä voittostrategiasta ja pumppauslemmasta seuraa, että $B$ ei ole säännöllinen. □

Monimutkaisen todistuksen muotoilu kahden pelaajan peliksi on varsin yleinen todistustekniikka. Usein näemme itsemme yhden pelaajan roolissa, jolloin toista pelaajaa kutsutaan *vastustajaksi* (adversary).



## Yhteenveto säännöllisistä kielistä

- Deterministinen äärellinen automaatti (DFA) on laskentalaite, jolla on syötteen pituudesta riippumaton *vakiomäärä muistia*. Määritelmän mukaan kieli on *säännöllinen*, jos ja vain jos se voidaan tunnistaa DFA:lla.
- Lauseen 1.3 perusteella kieli voidaan tunnistaa DFA:lla, jos ja vain jos se voidaan tunnistaa *epädeterministisellä* äärellisellä automaatilla (NFA:lla). DFA voi kuitenkin vaatia eksponentiaalisesti enemmän tiloja kuin NFA (vrt. harj. 4.5–4.6).
- Lauseen 1.9 perusteella kieli voidaan tunnistaa DFA:lla, jos ja vain jos se voidaan esittää *säännöllisellä lausekkeella*.
- Säännöllisten kielten luokka on *suljettu* yhdisteen, konkatenaation ja tähtioperaation suhteen (lauseet 1.6–1.8.) sekä mm. komplementin, leikkauksen ja käänteisoperaation suhteen (harj. 4).
- Kieli $\{\, 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ on esimerkki *ei-säännöllisestä* kielestä. Tämä voidaan todistaa esim. pumppauslemmalla (lause 1.17).

—

Ryhdymme seuraavaksi tarkastelemaan laajempaa *yhteydettömien* eli *kontekstittomien* kielten luokkaa.



# 2. Yhteydettömät kielet

*Yhteydettömät* eli *kontekstittomat kielet* (context-free language, CFL) ovat säännöllisiä kieliä laajempi luokka formaaleja kieliä. Ne voidaan esittää *yhteydettömillä kieliopeilla* (context-free grammar, CFG). Täsmälleen tämän kieliluokan tunnistamiseen kykeneväksi laskentalaitteeksi osoittautuu *pinoautomaatti* (push-down automaton, PDA).

Tämän luvun jälkeen opiskelija

- osaa määritellä kontekstittoman kieliopin ja pinoautomaatin sekä selittää niiden välisen suhteen,
- osaa muodostaa kieliopin yksinkertaiselle kontekstittomalle kielelle ja
- tuntee joitain perusesimerkkejä ei-yhteydettömistä kielistä

## Yhteydettömät kieliopit [Sipser luku 2.1]

Johdantoesimerkkinä tarkastelemme kieltä $L = \{ \mathrm{a}^n\mathrm{b}^m\mathrm{a}^n \mid n > 0, m > 0 \}$, joka on yhteydetön (mutta ei säännöllinen). Vastaavan kieliopin ytimenä on *säännöt* eli *produktiot*

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \mathrm{a}S\mathrm{a} \\ S & \to & \mathrm{a}B\mathrm{a} \\ B & \to & \mathrm{b}B \\ B & \to & \mathrm{b}. \end{array}$$

Kieliopin *muuttujat* eli *välikkeet* (variable, nonterminal symbol) ovat $S$ ja $B$. Näistä $S$ on erityisasemassa *lähtösymbolina*. *Päätemerkit* eli -symbolit (terminal) ovat a ja b. Kieliopista saadaan esim. merkkijonolle aabbaa $\in L$ seuraava *johto* (derivation):

$$S \Rightarrow \mathrm{a}S\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{aa}B\mathrm{aa} \Rightarrow \mathrm{aab}B\mathrm{aa} \Rightarrow \mathrm{aabbaa}.$$

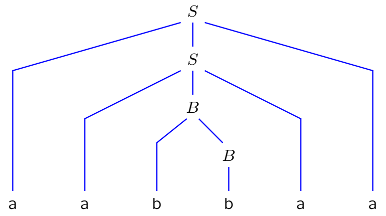
Johdossa siis aloitetaan lähtösymbolista ja korvataan muuttujat yksi kerrallaan vastaavan produktion oikealla puolella olevalla merkkijonolla.



Merkkijonon aabbaa johtoa

$$S \Rightarrow \mathrm{a}S\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{aa}B\mathrm{aa} \Rightarrow \mathrm{aab}B\mathrm{aa} \Rightarrow \mathrm{aabbaa}$$

vastaa seuraava *jäsennyspuu* (parse tree):




Lehtinä on johdetun merkkijonon merkit esijärjestyksessä ("vasemmalta oikealle"), juurena lähtösymboli ja sisäsolmuina välikkeitä. Kunkin välikkeen lapset vastaavat välikeeseen liittyvän säännön oikeaa puolta.



Muodollisesti *yhteydetön* eli *kontekstiton kielioppi* (context-free grammar, CFG) on nelikko $(V, \Sigma, R, S)$, missä

1. $V$ on äärellinen *muuttujien* (eli muuttujasymbolien eli välikesymbolien) joukko
2. $\Sigma$ on äärellinen *päätesymbolien* joukko, joka ei saa sisältää muuttujasymboleja
3. $R$ on äärellinen joukko *sääntöjä* eli *produktioita* muotoa $A \to w$, missä $A \in V$ on muuttuja ja $w \in (V \cup \Sigma)^*$ on mielivaltainen (mahdollisesti tyhjä) jono muuttujia ja päätesymboleja
4. jokin muuttuja $S \in V$ on asetettu *lähtösymboliksi* .



**Esimerkki 2.1:** Edellä todettiin, että kielelle $\{ \mathrm{a}^n\mathrm{b}^m\mathrm{a}^n \mid n, m > 0 \}$ on olemassa yhteydetön kielioppi $G = (V, \Sigma, R, S)$, missä

- $V = \{ S, B \}$
- $\Sigma = \{ \mathrm{a}, \mathrm{b} \}$
- $R = \{ S \to \mathrm{a}S\mathrm{a}\ ,\ S \to \mathrm{a}B\mathrm{a}\ ,\ B \to \mathrm{b}B\ ,\ B \to \mathrm{b} \}$
- $S$ on lähtösymboli.

Jatkossa esittämme tämän kieliopin yksinkertaisesti muodossa

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \mathrm{a}S\mathrm{a} \mid \mathrm{a}B\mathrm{a} \\ B & \to & \mathrm{b}B \mid \mathrm{b} \end{array}$$

Siis

- muuttujia ovat ne, jotka ovat jonkin säännön vasempana puolena,
- lähtösymboli on ensimmäisenä listatun säännön vasen puoli
- muut symbolit ovat päätesymboleita.
- samaan muuttujaan liittyvät säännöt kootaan yhteen ja niiden oikeat puolet erotetaan pystyviivalla toisistaan. □

Intuitiivisesti yhteydetön kielioppi $G = (V, \Sigma, R, S)$ tuottaa aakkoston $\Sigma$ merkkijonoja seuraavalla proseduurilla:

1. Alusta $r := S$. (Jatkossa $r$ saa arvokseen aakkoston $V \cup \Sigma$ merkkijonoja.)
2. Valitse merkkijonosta $r$ jokin kohta $i$, jossa esiintyy muuttujasymboli; ts. olkoon
$$r = r_1 \dots r_{i-1}\, A\, r_{i+1} \dots r_n,$$
missä $n = |r|$, $r_i \in V \cup \Sigma$ kaikilla $i$ ja $A \in V$.
3. Valitse sääntöjoukosta $R$ jonkin sääntö $A \to w_1 \dots w_m$, jonka vasen puoli on sama kuin merkkijonosta $r$ valittu muuttujasymboli.
4. Aseta muuttujalle $r$ uusi arvo
$$r := r_1 \dots r_{i-1}\, w_1 \dots w_m\, r_{i+1} \dots r_k.$$
5. Jos $r$ sisältää pelkkiä päätemerkkejä (eli $r \in \Sigma^*$), niin tulosta $r$. Muuten palaa kohtaan 2.

Kieliopin tuottama kieli koostuu niistä aakkoston $\Sigma$ merkkijonoista, jotka tämä proseduuri voi tulostaa, kun sovellettavat säännöt valitaan sopivasti.



Määritellään nyt täsmällisemmin kieliopin $G = (V, \Sigma, R, S)$ tuottama kieli. Jos $x = u\, A\, v$ ja $y = u\, w\, v$, missä $A \to w \in R$, niin $x$ *johtaa suoraan* eli *tuottaa suoraan* (yields, derives directly) merkkijonon $y$. Tätä merkitään
$$x \Rightarrow y.$$
Jos on olemassa aakkoston $V \cup \Sigma$ merkkijonot $u_0, \dots, u_{k-1}$, missä $u_{i-1} \Rightarrow u_i$ kun $i = 1, \dots, k$, merkitään
$$u_0 \stackrel{*}{\Rightarrow} u_k$$
ja sanotaan, että $u_0$ *johtaa* eli *tuottaa* (derives) merkkijonon $u_k$. Tapauksessa $k > 0$ voidaan merkitä $u_0 \stackrel{+}{\Rightarrow} u_k$.

Aakkoston $V \cup \Sigma$ merkkijono $w$ on *lausejohdos* (sentential form), jos $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$. Jos lisäksi $w$ sisältää vain päätesymboleja, se on *lause*.

Kieliopin $G$ *tuottama* eli *kuvaama* kieli on sen lauseiden joukko
$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w \right\}.$$
Kieli on *yhteydetön*, jos jokin yhteydetön kielioppi tuottaa sen.



**Selitys termille "yhteydetön":** "Yhteydetön" viittaa siihen, että kieliopin säännöt ovat muotoa $A \to w$, mikä voidaan tulkita

> Muuttuja $A$ voidaan korvata merkkijonolla $w$, oli ympärillä mitä tahansa.

Sääntöjä siis voidaan soveltaa "kontekstista riippumatta".

Yhteydettömän kielioppin eräs mahdollinen yleistys on *yhteysherkkä kielioppi* (context-sensitive grammar). Tällaisen kieliopin säännöt ovat muotoa $uAv \to uwv$, missä $u$, $v$ ja $w$ ovat aakkoston $V \cup \Sigma$ merkkijonoja. Sääntö tulkitaan

> Muuttuja $A$ voidaan korvata merkkijonolla $w$, jos sen ympärillä on merkkijonot $u$ ja $v$.

Voidaan osoittaa, että esim. kieli
$$\{\, \mathsf{a}^n \mathsf{b}^n \mathsf{c}^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$
ei ole yhteydetön, mutta voidaan esittää käyttämällä yhteysherkkiä sääntöjä.



Jos $u \in L(G)$ ja $S \Rightarrow v_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_k = u$, tätä ketjua sanotaan merkkijonon $u$ *johdoksi* (derivation), ja sen *pituus* on $k$.

Merkkijonon $u \in \Sigma^*$ *jäsennyspuu* on mikä tahansa seuraavat ehdot täyttävä puu:

1. sisäsolmut on nimetty muuttujasymboleilla ja lehdet päätesymboleilla
2. juurena on lähtösymboli $S$
3. lehtinä ovat merkkijonon $u$ merkit järjestyksessä vasemmalta oikealle sekä mahdollisesti tyhjän merkkijonon symboleja $\varepsilon$
4. jos $A$ on sisäsolmu ja sen lapset vasemmalta oikealle ovat $w_1, \dots, w_k$, niin kieliopissa on sääntö $A \to w_1 \dots w_k$.

Merkkijonon $u$ johdosta voidaan rakentaa sille jäsennyspuu:

1. Lähdetään liikkeelle puusta, jossa on pelkkä juuri $S$.
2. Kun johdossa sovelletaan sääntöä $A \to w_1 \dots w_k$, niin puussa vastaavalle lehdelle $A$ lisätään lapset $w_1, \dots, w_k$.

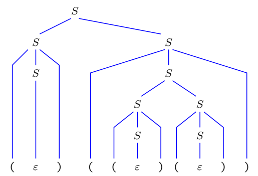
**Esimerkki 2.2:** Yhteydetön kielioppi

$$S \to SS \mid (\ S\ ) \mid \varepsilon$$

tuotaa kaikki oikein muodostetut sulkulausekkeet. Tässä siis päätesymbolit ovat vasen ja oikea sulkumerkki. Sulkulauseke on oikein muodostettu, jos vasemmat ja oikeat sulkumerkit voidaan pariuttaa siten, että mikään pari ei mene ristiin.

Sulkulausekkeen ( ) ( ( ) ( ) ) eräs johto ja sitä vastaava jäsennyspuu ovat

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow SS \\ &\Rightarrow (\,S\,)S \\ &\Rightarrow (\,)S \\ &\Rightarrow (\,)(S) \\ &\Rightarrow (\,)(SS) \\ &\Rightarrow (\,)((S)\,S) \\ &\Rightarrow (\,)((\,)\,S) \\ &\Rightarrow (\,)((\,)(S)) \\ &\Rightarrow (\,)((\,)\,(\,)) \end{aligned}$$




□



## Yhteydettömien kielioppien laatiminen [Sipser s. 106–107]

Yhteydettömiä kielioppeja on helppo tuottaa soveltamalla vastaavia operaatioita kuin säännöllisissä lausekkeissa.

**Lause 2.3:** Jos $A$ ja $B$ ovat yhteydettömiä kieliä, niin myös $A \cup B$, $A \circ B$ ja $A^*$ ovat.

**Todistus:** Tarkastellaan esimerkkinä yhdistettä $A \cup B$; muut kohdat menevät samaan tapaan.

Olkoot $A$ ja $B$ aakkoston $\Sigma$ yhteydettömiä kieliä. Siis $A = L(G_A)$ ja $B = L(G_B)$ joillain yhteydettömillä kieliopeilla $G_A = (V_A, \Sigma, R_A, S_A)$ ja $G_B = (V_B, \Sigma, R_B, S_B)$. Kielioppien muuttujasymboleita voidaan tarvittaessa vaihtaa niin, että $V_A \cap V_B = \emptyset$.

Olkoon $S \notin V_A \cup V_B$. Määritellään $G = (V_A \cup V_B \cup \{\, S \,\}, \Sigma, R, S)$, missä

$$R = R_A \cup R_B \cup \{\, S \to S_A \,\} \cup \{\, S \to S_B \,\}\,.$$

Selvästi $L(G) = A \cup B$. □



Lauseesta 2.3 seuraa erityisesti

**Korollaari 2.4:** Kaikki säännölliset kielet ovat yhteydettömiä. □

Jatkossa osoittautuu toisaalta, että yhteydettömien kielten luokka **ei** ole suljettu leikkauksen ja komplementin suhteen, toisin kuin säännöllisten kielten luokka.

Yhteydettömät kielet ovat aidosti laajempi luokka kuin säännölliset. Perusesimerkki tästä on "yhtäsuuruusvertailu" rekursiota käyttämällä.

**Esimerkki 2.5:** Kieli $\{\, 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ tunnetusti ei ole säännöllinen. Se voidaan kuitenkin tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$S \to 0S1 \mid \varepsilon$$

□

Tarkastelemme seuraavaksi esimerkkejä tyypillisistä yhteydettömien kielioppien rakenteista.



Seuraava esimerkki osoittaa, miten yhteydettömällä kieliopilla voidaan tuottaa kaksi keskenään "peilisymmetristä" osamerkkijonoa.

**Esimerkki 2.6:** Aakkoston $\{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}$ palindromien joukko $\left\{\, w \in \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}^* \mid w = w^{\mathcal{R}} \,\right\}$ voidaan tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$S \to \varepsilon \mid \mathsf{a} \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{a}S\mathsf{a} \mid \mathsf{b}S\mathsf{b}.$$

Vastaavasti kieli $\left\{\, ww^{\mathcal{R}} \mid w \in \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}^* \,\right\}$ voidaan tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$S \to \varepsilon \mid \mathsf{a}S\mathsf{a} \mid \mathsf{b}S\mathsf{b}.$$

Sen sijaan kieli $\{\, ww \mid w \in \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}^* \,\}$ ei ole yhteydetön, kuten jatkossa näemme. □