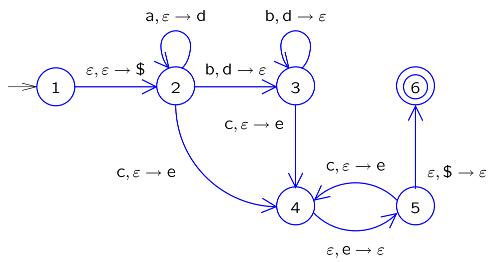
Esimerkki 2.28: Tarkastellaan edellisen sivun ehdot (1)–(3) toteuttavaa pinoautomaattia, jossa päätemerkit ovat a, b ja c ja pinoaakkoset d, e ja \$:



Automaatti tunnistaa kielen $\{\, \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^m \mid n \geq 0, m > 0 \,\}$, joka voidaan tuottaa kieliopilla

$$
\begin{array}{rcl}
S & \to & XC \\
X & \to & \mathsf{a}X\mathsf{b} \mid \varepsilon \\
C & \to & \mathsf{c}C \mid \mathsf{c}
\end{array}
$$

Ongelmana on löytää yleiskäyttöinen menetelmä, jolla automaatista saadaan jokin saman kielen tunnistava kielioppi.

Seuraavanlaiset laskennat automaatissa osoittautuvat konstruktion kannalta keskeisiksi:

- aluksi automaatti on tilassa $p \in Q$ ja pino on tyhjä
- siirtymät kuluttavat syötettä merkkijonon $w \in \Sigma^*$ verran ja
- lopuksi automaatti on tilassa $q \in Q$ ja pino on taas tyhjä.

Tässä ajatellaan, että automaatti aluksi ”pakotetaan” tilaan p ja sen pino tyhjennetään; emme ota kantaa siihen, voiko automaatti todella joutua tällaiseen tilanteeseen.

Merkitsemme $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$, jos ylläesitetty laskentaketju on mahdollinen. Huomaa erityisesti, että automaatti hyväksyy merkkijonon w, jos ja vain jos $q_{\mathsf{start}} \overset{w}{\rightsquigarrow} q_{\mathsf{accept}}$. Tavoitteena on muodostaa kielioppi, jossa

- muuttujina on $A_{p,q}$ kaikilla automaatin tiloilla p ja q
- $A_{p,q} \overset{*}{\Rightarrow} w$ pätee, jos ja vain jos $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$.

Edellisen sivun määrittely ehdolle $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$ on yhtäpitävää sen kanssa, että seuraava on mahdollista *millä tahansa* $n \in \mathbb{N}$:

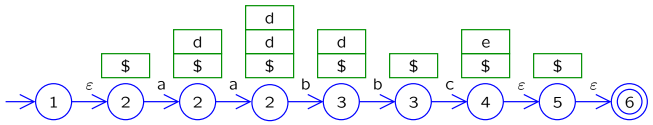
- aluksi automaatti on tilassa p ja pinossa on *tasan* n merkkiä,
- siirtymät kuluttavat syötettä merkkijonon w verran ja pinossa on koko ajan *ainakin* n merkkiä ja
- lopuksi automaatti on tilassa q ja pinossa on taas *tasan* n merkkiä.

Ehto nimittäin sanoo, että siirtyessään tilasta p syötteellä w tilaan q automaatti ei ”kurki” pinon vanhoja sisältöjä, joten pinon alkutilanteella ei ole merkitystä.

Toisin sanoen laskennan edetessä tilasta p syötteellä w tilaan q

- pinossa alun perin olleisiin merkkeihin ei kosketa ja
- kaikki pinoon laskennan aikana painetut uudet merkit myös poistetaan sieltä.

Palataan nyt esimerkkiautomaattiimme ja tarkastellaan merkkijonon aabbc hyväksyvää laskentaa. Siirtymänuolten päälle on merkitty vastaavat syötemerkit, ja pinon sisältö on merkitty kunkin tilan kohdalle.



Laskennasta voidaan havaita seuraavat laskentaketjut, jotka jättävät pinon ennalleen:

- $1 \overset{\mathsf{aabbc}}{\rightsquigarrow} 6$ (pino aluksi ja lopuksi tyhjä)
- $2 \overset{\mathsf{aabbc}}{\rightsquigarrow} 5$ (pinossa aluksi ja lopuksi \$)
- $2 \overset{\mathsf{aabb}}{\rightsquigarrow} 3$ (pinossa aluksi ja lopuksi \$)
- $2 \overset{\mathsf{ab}}{\rightsquigarrow} 3$ (pinossa aluksi ja lopuksi d\$)
- $3 \overset{\mathsf{c}}{\rightsquigarrow} 5$ (pinossa aluksi ja lopuksi \$)

Tavoitteena on vangita tämä rakenne yhteydettömään kielioppiin. □

Lemman 2.27 todistushahmotelma: Lähdemme siis liikkeelle pinoautomaatista $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, \{ q_{\text{accept}} \})$ ja muodostamme yhteydettömän kieliopin G, jolla $L(G) = L(M)$. Oletamme, että automaatti täyttää sivun 200 ehdot (1)–(3) eli erityisesti jokainen siirtymä on joko push-siirtymä tai pop-siirtymä.

Edellä esitetyn mukaisesti kieliopin muuttujajoukoksi tulee $\{ A_{p,q} \mid p, q \in Q \}$, ja kaikilla $p, q \in Q$ halutaan

$$A_{p,q} \overset{*}{\Rightarrow} w \qquad \text{jos ja vain jos} \qquad p \overset{w}{\rightsquigarrow} q.$$

Tarkastellaan laskentaa, jossa automaatti siirtyy tilasta p syötteellä w tilaan q siten, että pino sisältää laskennan aluksi ja lopuksi tasan samat merkit.

Triviaalitapaus on, että $p = q$ ja $w = \varepsilon$; tämä siis vastaa nollan pituista "laskentaa". Siis kaikilla $p \in Q$ pätee $p \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} p$, joten voimme ottaa kielioppiin säännön $A_{p,p} \to \varepsilon$.

Edellisen triviaalitapauksen lisäksi laskentoja $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$ voi muodostua kahdella tavalla.

Tapaus I: Jos $p \overset{u}{\rightsquigarrow} r$ ja $r \overset{v}{\rightsquigarrow} q$, voidaan päätellä $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$, kun $w = uv$. Tässä siis tilasta p mennään ensin syötteellä u tilaan r, jossa pinon alkuperäinen sisältö toistuu ensimmäisen kerran. Tilasta r jatketaan syötteellä v tilaan q, jossa pinon sisältö toistuu kolmannen kerran.

Kieliopin kannalta jos $A_{p,r} \overset{*}{\Rightarrow} u$ ja $A_{r,q} \overset{*}{\Rightarrow} v$, niin pitää olla $A_{p,q} \overset{*}{\Rightarrow} uv$. Hoidamme tämän ottamalla kielioppiin säännöt

$$A_{p,q} \to A_{p,r} A_{r,q}$$

kaikilla $p, q, r \in Q$.

Tapaus II: Jos joillain tiloilla $r, s \in Q$ ja pinomerkillä t

- tilasta p voidaan siirtyä tilaan r viemällä pinoon merkki t
- tilasta s voidaan siirtyä tilaan q poimimalla pinosta merkki t ja
- tilasta r voidaan päästä tilaan s siten, että pinon sisältö on sama aluksi ja lopuksi

niin tilasta p voidaan päästä tilaan q siten, että pinon sisältö on sama aluksi ja lopuksi. Ottamalla vielä huomioon siirtymiin liittyvät syötemerkit esitämme tämän tapauksen muodossa

$$p \xrightarrow{a, \varepsilon \to t} r \overset{v}{\rightsquigarrow} s \xrightarrow{b, t \to \varepsilon} q,$$

missä siis seuraa $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$, missä $w = avb$. Tästä saadaan kielioppiin säännöt

$$A_{p,q} \to a A_{r,s} b$$

kaikilla sellaisilla $p, q, r, s \in Q$ ja $a, b \in \Sigma_\varepsilon$, että $(r, t) \in \delta(p, a, \varepsilon)$ ja $(q, \varepsilon) \in \delta(s, b, t)$ jollain $t \in \Gamma$.

Kokoamme edellä esitetyn yhteen ja määrittelemme kieliopin $G = (V, \Sigma, R, S)$ seuraavasti:

- $V = \{ A_{p,q} \mid p, q \in Q \}$,
- Σ on sama kuin automaatin syöteaakkosto,
- $S = A_{q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}}$ ja
- joukossa R on seuraavat säännöt:
  - $A_{p,p} \to \varepsilon$ kaikilla $p \in Q$.
  - $A_{p,q} \to A_{p,r} A_{r,q}$ kaikilla $p, q, r \in Q$,
  - $A_{p,q} \to a A_{r,s} b$ aina kun $(r, t) \in \delta(p, a, \varepsilon)$ ja $(q, \varepsilon) \in \delta(s, b, t)$ jollain $t \in \Gamma$

Konstruktion oikeellisuus, eli että todella $A_{p,q} \overset{*}{\Rightarrow} w$ jos ja vain jos $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$, seuraa kahdesta aputuloksesta:

Väite A: Jos $A_{p,q} \overset{*}{\Rightarrow} w$, missä $w \in \Sigma^*$, niin $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$.

Väite B: Jos $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$, missä $w \in \Sigma^*$, niin $A_{p,q} \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Nämä ovat Sipserin Claim 2.30 ja Claim 2.31; sivuutamme niiden induktiotodistukset. □

Esimerkki 2.29: Tarkastellaan sivun 201 automaattia. Etsimällä siirtymäparit, joissa on push ja pop samalle pinosymbolille, saadaan seuraavat säännöt:

$$\begin{array}{ll} A_{1,6} \to A_{2,5} & A_{2,5} \to \mathsf{c}A_{4,4} \\ A_{2,3} \to \mathsf{a}A_{2,2}\mathsf{b} & A_{3,5} \to \mathsf{c}A_{4,4} \\ A_{2,3} \to \mathsf{a}A_{2,3}\mathsf{b} & A_{5,5} \to \mathsf{c}A_{4,4} \end{array}$$

Lähtösymboli on $A_{1,6}$.

Lisäksi kielioppiin tulee säännöt $A_{p,p} \to \varepsilon$, missä $p = 1, \ldots, 6$, ja suuri joukko muotoa $A_{p,q} \to A_{p,r}A_{r,q}$ olevia sääntöjä. Suurin osa näistä on kuitenkin turhia. Esim. sääntö $A_{1,6} \to A_{1,5}A_{5,6}$ toisi mukaan muuttujan $A_{5,6}$, josta ei enää pääse eroon, eli säännöllä ei saada yhtään päätemerkkijonoa. Tarpeellisia ovat

$$\begin{array}{ll} A_{2,5} \to A_{2,3}A_{3,5} & A_{4,4} \to \varepsilon \\ A_{2,5} \to A_{2,5}A_{5,5} & A_{2,2} \to \varepsilon \end{array}$$

Nyt merkkijonolle aabbc saadaan johto

$$A_{1,6} \Rightarrow A_{2,5} \Rightarrow A_{2,3}A_{3,5} \Rightarrow \mathsf{a}A_{2,3}\mathsf{b}A_{3,5} \\ \Rightarrow \mathsf{aa}A_{2,2}\mathsf{bb}A_{3,5} \Rightarrow \mathsf{aabb}A_{3,5} \Rightarrow \mathsf{aabbc}A_{4,4} \Rightarrow \mathsf{aabbc}.$$

Vertaa tässä esiintyviä muuttujanimiä sivulla 204 esitettyihin laskentoihin

$$\begin{array}{ll} 1 \overset{\mathsf{aabbc}}{\leadsto} 6 & 2 \overset{\mathsf{aabbc}}{\leadsto} 5 \\ 2 \overset{\mathsf{aabb}}{\leadsto} 3 & 2 \overset{\mathsf{ab}}{\leadsto} 3 \\ 3 \overset{\mathsf{c}}{\leadsto} 5 & \end{array}$$

ja sivujen 206–207 tapauksiin I ja II.

Kielioppi ei ole sama kuin sivulla 201 annettu, missä ei ole mitään ihmeellistä, sillä samalle kielelle on tietysti yleensä useita erilaisia kielioppeja. □

Yhdistämällä Lemmat 2.24 ja 2.27 saadaan

Lause 2.30: [Sipser Thm. 2.20] Kieli on yhteydetön, jos ja vain jos se voidaan tunnistaa pinoautomaatilla. □

Huomaa, että tästä **ei** seuraa, että osaisimme millä tahansa yhteydettömällä kielellä A ja merkkijonolla w ratkaista tehokkaasti, päteekö $w \in A$. Pinoautomaatin toiminnassa epädeterminismi on oleellista, ja vastauksen saamiseksi voidaan joutua kokeilemaan hyvin suurta määrää erilaisia laskentoja. Kuten sivulla 166 mainittiin, tehokkaat jäsennysalgoritmit tekevät lisäoletuksia kieliopista. Yleisessä tapauksessa voidaan käyttää CYK-algoritmia, joka vaatii ajan $O(|w|^3)$ (eikä perustu automaattiin).

Tilanne on siis tässä suhteessa erilainen kuin säännöllisten kielten ja äärellisten automaattien tapauksessa.

Voimme kuitenkin todeta seuraavan tuloksen (jonka voi todistaa helpomminkin):

Korollaari 2.31: Säännölliset kielet ovat yhteydettömiä.

Todistus: Jos kieli voidaan tunnistaa äärellisellä automaatilla, se voidaan tietysti tunnistaa pinoautomaatilla. □

Ei-yhteydettömät kielet [Sipser luku 2.3]

Jäsennyspuita tarkastelemalla voimme osoittaa esim. että kieli $\{\, \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ei ole yhteydetön. Tämä perustuu samantapaiseen pumppautuvuuteen kuin ei-säännöllisyyttä osoitettaessa.

Lause 2.32 (Yhteydettömien kielten pumppauslemma): [Sipser Thm. 2.34] Jos A on yhteydetön kieli, niin sille on olemassa *pumppauspituus* $p \in \mathbb{N}$, jolle seuraava pätee:

jos $s \in A$ ja $|s| \geq p$
niin on olemassa jako $s = uvxyz$, jolla
1. $uv^ixy^iz \in A$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$,
2. $|vy| > 0$ ja
3. $|vxy| \leq p$.

Eroksi säännöllisistä kielistä tässä siis pumpataan merkkijonoa *kahdesta kohdasta* samaan tahtiin. Muuten lemman soveltamiseen pätevät samat perushuomiot kuin säännöllisten kielten tapauksessa:

- Lemmaa käytetään yleensä epäsuorassa todistuksessa osoittamaan kieli ei-yhteydettömäksi.
- Tällöin merkkijono s voidaan valita sopivalla tavalla helpottamaan todistusta.
- Sen sijaan jakoa $s = uvxyz$ ei voi itse valita, vaan kaikki mahdollisuudet on käsiteltävä.
- Lemmalla ei voi todistaa kieltä yhteydettömäksi: myös ei-yhteydetön kieli voi olla pumppautuva.

Ei-yhteydettömyystodistus pumppauslemman avulla toimii siis seuraavaan tapaan:

1. Aloitus: "Tehdään vastaoletus, että kieli A on yhteydetön ..."
2. Valitaan merkkijono $s \in A$, jolla $|s| \geq p$.
3. Eliminoidaan kaikki jaot $s = uvxyz$.
   - Alussa mukana on kaikki mahdolliset jaot.
   - Eliminoidaan jakoja ehtojen (1)–(3) perusteella.
   - Lopussa kaikki jaot on saatu eliminoitua.
4. Lopetus: "... ristiriita ..."

Lause 2.33: [Sipser Example 2.36] Kieli $A = \{ \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ei ole yhteydetön.

Todistus: Tehdään vastaoletus, että A on yhteydetön. Sillä on siis pumppauspituus p.

Valitaan $s = \mathsf{a}^p\mathsf{b}^p\mathsf{c}^p$. Selvästi $s \in A$ ja $|s| \geq p$.

Olkoon nyt $s = uvxyz$. Ehdon $|vxy| \leq p$ perusteella voidaan eliminoida jaot, joissa vxy sisältää sekä a- että c-merkkejä.

Tarkastellaan tapausta, että vxy ei sisällä a-merkkejä. Kun on eliminoitu jaot, joilla $|vy| = 0$, jäljelle jääneissä jaoissa vy sisältää b- tai c-merkkejä (tai molempia). Tällöin $uvvxyyz$ sisältää b- tai c-merkkejä enemmän kuin a-merkkejä, joten $uvvxyyz \notin A$ ja nämäkin jaot saadaan eliminoitua.

Tapaukset, joissa vxy ei sisällä c-merkkejä, eliminoidaan samaan tapaan.

Siis mikään jako $s = uvxyz$ ei toteuta kaikkia pumppauslemman ehtoja; **ristiriita**. □

Intuitiivisesti siis yhteydettömällä kieliopilla, tai pinoautomaatilla, ei pysty vertailemaan kolmea eri lukumäärää samanaikaisesti.

Edellisestä esimerkistä nähdään myös tärkeä ero yhteydettömien ja säännöllisten kielten sulkeumaominaisuuksissa:

Korollaari 2.34: Yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen eikä komplementin suhteen.

Todistus: Olkoon

$$A_1 = \{ \mathsf{a}^m\mathsf{b}^m\mathsf{c}^n \mid m, n \in \mathbb{N} \} \qquad \text{ja} \qquad A_2 = \{ \mathsf{a}^m\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \mid m, n \in \mathbb{N} \}.$$

Kielet A_1 ja A_2 ovat yhteydettömiä, mutta niiden leikkaus on edellisen lauseen ei-yhteydetön kieli A. Siis yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen suhteen.

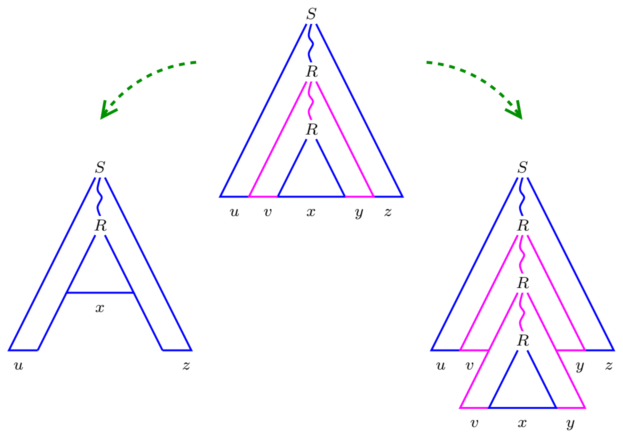
Tehdään nyt vastaoletus, että yhteydettömien kielten luokka on suljettu komplementin suhteen. Koska $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ ja yhteydettömien kielten luokka on suljettu yhdisteen suhteen, luokka on suljettu myös leikkauksen suhteen; ristiriita. □

Yhteydettömien kielten pumppauslemman todistus: Todistuksen perusajatus on seuraava:

- Jos s on kielen A merkkijono, sillä on jäsennyspuu sopivassa kielen A kieliopissa.
- Jos lisäksi s on kovin pitkä, jäsennyspuussa on oltava ainakin yksi pitkä haara.
- Kun jäsennyspuun haara on riittävän pitkä, ainakin yhden muuttujan R on pakko esiintyä ainakin kaksi kertaa (kyyhkyslakkaperiaate).
- Muuttujan R esiintyminen omana jälkeläisenään jäsennyspuussa tarkoittaa, että $R \overset{*}{\Rightarrow} vRy$ joillakin $v, y \in \Sigma^*$. Voimme pumpata tätä:

$$R \overset{*}{\Rightarrow} vRy \overset{*}{\Rightarrow} vvRyy \overset{*}{\Rightarrow} vvvRyyy \overset{*}{\Rightarrow} \ldots.$$

Tilanne kuvana:



Vasen versio esittää ”alaspäin pumppaamista”.

Jos asiaa ajatellaan johtojen kannalta, niin alkutilanteessa nähdään

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uRz \overset{*}{\Rightarrow} uvRyz \overset{*}{\Rightarrow} uvxyz,$$

missä sekä $R \overset{*}{\Rightarrow} vRy$ että $R \overset{*}{\Rightarrow} x$, ja $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$. Näitä uudelleen yhdistelemällä saadaan johdot

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uRz \overset{*}{\Rightarrow} uxz$$
$$S \overset{*}{\Rightarrow} uRz \overset{*}{\Rightarrow} uvRyz \overset{*}{\Rightarrow} uvvRyyz \overset{*}{\Rightarrow} uvvxyyz$$
$$S \overset{*}{\Rightarrow} uRz \overset{*}{\Rightarrow} uvRyz \overset{*}{\Rightarrow} uvvRyyz \overset{*}{\Rightarrow} uvvvRyyyz \overset{*}{\Rightarrow} uvvvxyyyz$$
$$\ldots$$

Täsmennetään nyt, mitä edellä esitetyssä hahmotelmassa tarkoittaa ”pitkä”. Olkoon $A = L(G)$ jollain yhteydettömällä kieliopilla $G = (V, \Sigma, R, S)$. Olkoon b suurin minkään säännön oikealla puolella olevien symbolien määrä. Siis jäsennyspuun millään solmulla ei ole yli b lasta.

Jos jäsennyspuun syvyys on h, siinä on korkeintaan b^h lehteä. (Syvyys on kaarten lukumäärä pisimmällä polulla juuresta lehteen.) Valitaan $p = b^{|V|+1}$. Siis jos merkkijonon pituus on vähintään p, sen jäsennyspuun syvyys on ainakin $|V| + 1$.

Olkoon nyt $s \in A$ sellainen, että $|s| \geq p$. Olkoon τ merkkijonon s jäsennyspuu; jos niitä on useita, valitaan vähiten solmuja sisältävä.

Valitaan puusta τ pisin polku juuresta lehteen. Edellisen perusteella polulla on enemmän kuin $|V|$ kaarta ja siis ainakin $|V| + 2$ symbolia. Näistä vain viimeinen on päätesymboli.

Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla erityisesti polun *viimeisten* $|V| + 2$ symbolin joukossa ainakin yksi muuttuja esiintyy ainakin kaksi kertaa. Olkoon R tällainen.

Nyt s voidaan kirjoittaa muotoon $s = uvxyz$, missä x on symbolin R alemmasta esiintymästä tuotettu merkkijono ja vxy ylemmästä esiintymästä. (Tämä vastaa sivun 218 kuvan keskimmäistä puuta.)

Jäsennyspuuta vastaava johto voidaan jakaa osiin

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uRz \overset{*}{\Rightarrow} uvRyz \overset{*}{\Rightarrow} uvxyz,$$

missä $R \overset{*}{\Rightarrow} vRy$ ja $R \overset{*}{\Rightarrow} x$. Näin ollen myös

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uRz \overset{*}{\Rightarrow} uxz$$

ja

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uRz \overset{*}{\Rightarrow} uvRyz \overset{*}{\Rightarrow} uvvRyyz \overset{*}{\Rightarrow} \ldots \overset{*}{\Rightarrow} uv^iRy^iz \overset{*}{\Rightarrow} uv^ixy^iz$$

millä tahansa $i \geq 1$. Siis $uv^ixy^iz \in A$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Koska jäsennyspuun oletettiin olevan pienin mahdollinen, ei voi olla $v = y = \varepsilon$, vaan $|vy| > 0$.

Koska symbolin R ylemmän esiintymän korkeus on korkeintaan $|V| + 1$, siitä tuotetun merkkijonon vxy pituus on korkeintaan $b^{|V|+1} = p$. $\square$

Toinen perusesimerkki yhteydettömien kielten pumppauslemmasta osoittaa intuitiivisesti esim. sen, että yhteydettömällä kieliopilla ei voi esittää sellaisia ohjelmointikielten rajoituksia kuin "muuttuja pitää määritellä ennen käyttöä".

Esimerkki 2.35: [Sipser Ex. 2.38] Kieli $B = \{ ww \in | w \in \{ 0, 1 \}^n \}$ ei ole yhteydetön.

Vastaoletus: B on yhteydetön ja sillä on pumppauspituus p. Valitaan $s = 0^p1^p0^p1^p \in B$, jolloin $|s| \geq p$. Tarkastellaan jakoa $s = uvxyz$.

Jos vxy sisältyy kokonaan merkkijonon s alkupuoliskoon, niin $uxz = 0^i1^j0^p1^p$, missä $i + j = 2p - |vy| < 2p$. Siis merkkijonon uxz alkupuolisko loppuu 0:aan, joten uxz ei ole muotoa ww; ristiriita. Samoin nähdään, että vxy ei voi kokonaan sisältyä loppupuoliskoon.

Jäljelle jää mahdollisuus, että jonon $0^p1^p0^p1^p = uvxyz$ keskikohta osuu pätkään vxy. Nyt $uxz = 0^p1^i0^j1^p$, missä $i < p$ tai $j < p$. Taaskaan uxz ei ole muotoa ww; ristiriita. $\square$

Kurssi tähän asti: säännölliset ja yhteydettömät kielet