

## 582206 Laskennan mallit (syksy 2009)

### Harjoitus 1 (8.–11.9.)

Tehtävät kertaavat kursseilla *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* ja *Tietorakenteet* opittuja jatkossa tarpeellisia asioita. Näistä asioista on hyvä yhteenveto myös Sipserin kirjan luvussa 0.

1. Tarkastellaan kokonaislukujen joukon  $\mathbb{Z}$  osajoukkoja  $A = \{1, 2, 3\}$  ja  $B = \{2, 3, 4\}$ . Merkinnällä  $\overline{C}$  tarkoitetaan joukon  $C$  komplementtia:

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \mathbb{Z} - C \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin C\}.\end{aligned}$$

Mitä alkioita kuuluu seuraaviin joukkoihin:

- (a)  $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$  ja
  - (b)  $\overline{A \cap B}$ ?
2. Todista induktiolla, että  $n^3 - n$  on jaollinen kolmella kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n$ .
  3. Joukon  $X$  relaatio  $\sim$  on *ekvivalenssirelaatio*, jos kaikilla joukon  $X$  alkiolla  $x, y$  ja  $z$  seuraavat ehdot pätevät:

**refleksiivisyys:**  $x \sim x$

**symmetrisyys:** jos  $x \sim y$ , niin  $y \sim x$

**transitiivisuus:** jos  $x \sim y$  ja  $y \sim z$ , niin  $x \sim z$ .

- (a) Olkoon  $G = (V, E)$  *suuntaamaton* verkko. Merkitään  $u \rightsquigarrow v$ , jos verkossa on polku solmusta  $u$  solmuun  $v$ . Onko relaatio  $\rightsquigarrow$  joukon  $V$  ekvivalenssirelaatio? Perustele lyhyesti.
  - (b) Olkoon  $G = (V, E)$  *suunnattu* verkko. Merkitään  $u \rightsquigarrow v$ , jos verkossa on polku solmusta  $u$  solmuun  $v$ . Onko relaatio  $\rightsquigarrow$  joukon  $V$  ekvivalenssirelaatio? Perustele lyhyesti.
4. [Sipser Problem 0.12] Osoita, että jos suuntaamattomassa verkossa on ainakin kaksi solmua, niin siinä on kaksi solmua, joiden aste (naapurien lukumäärä) on sama.