582206 Laskennan mallit (syksy 2009)
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä

Nämä tehtävät liittyvät viimeisen luentokerran aiheeseen, josta ei enää ehditä järjestää varsinaisia laskuharjoituksia. Tehtävien ratkaiseminen sinäänsä on täysin vapaaehtoista, mutta tämäkin aihepiiri **kuuluu** kurssin koealueeseen. Malliratkaisut ilmestyvät kurssin kotisivulle.

1. Etsi kirjallisuudesta seuraavien NP-täydellisten ongelmien määritelmät: (a) kauppamatkustajan ongelma (travelling salesperson problem, TSP); (b) repunpakkausongelma (knapsack problem); ja (c) joukkopeiteongelma (set covering problem). Nämä ongelmat löytyvät useimmista laskennan vaativuuden tai algoritmiteorian oppikirjoista, mutta myös Internet on täysin riittävä tietolähde tähän tehtävään.

2. Suuntaamattoman verkon $G = (V, E)$ *riippumaton joukko* on mikä tahansa sellainen solmujoukko $I \subseteq V$, että minkään kahden joukkoon I kuuluvan solmun välillä ei ole kaarta (eli $(I \times I) \cap E = \emptyset$). Määritellään ongelma

   $$\textsc{IndependentSet} = \{\, \langle G, k \rangle \mid \text{verkossa } G \text{ on } k\text{-solmuinen riippumaton joukko} \,\} .$$

   Osoita, että $\textsc{IndependentSet} \in \mathrm{P}$, jos ja vain jos $\textsc{Clique} \in \mathrm{P}$.

   Vihje: Oleta, että jokin proseduuri p ratkaisee klikkiongelman. Ratkaise verkon (V, E) riippumaton joukko -ongelma soveltamalla proseduuria p komplementtiverkkoon $(V, \overline{E}) = (V, (V \times V) - E)$.

3. Määritelmän mukaan NP-täydelliset ongelmat ovat formaaleja kieliä, eli käytännössä *päätösongelmia* (kyllä/ei-kysymyksiä). Esim. klikkiongelma voidaan esittää muodossa

   Syöte: suuntaamaton verkko G, luonnollinen luku k
   Tuloste: ”kyllä”, jos verkossa G on k-solmuinen klikki; muuten ”ei”.

   Samaan perustilanteeseen liittyy myös *optimointiongelma*

   Syöte: suuntaamaton verkko G
   Tuloste: verkon G suurimman klikin solmujen lukumäärä,

   jossa siis vastauksena on yksi luku, ja *etsintäongelma*

   Syöte: suuntaamaton verkko G
   Tuloste: verkon G suurin klikki,

   jossa vastauksena itse klikin muodostava solmujoukko.

   Osoita, että

   (a) jos päätösongelmalle on polynomisessa ajassa toimiva ratkaisualgoritmi, niin myös optimointiongelmalle on sellainen, ja

   (b) jos optimointiongelmalle on polynomisessa ajassa toimiva ratkaisualgoritmi, niin myös etsintäongelmalle on sellainen.

   Vihje: Ratkaise optimointiongelma kutsumalla päätösongelman oletettua ratkaisualgoritmia useita kertoja hieman eri argumenteilla; samoin etsintäongelma käyttäen optimointiongelman algoritmia.

4. Osoita, että, jos $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, niin jokainen kieli $A \in \mathrm{P}$, paitsi $A = \emptyset$ ja $A = \Sigma^*$, on NP-täydellinen.