

## 582206 Laskennan mallit (syksy 2009)

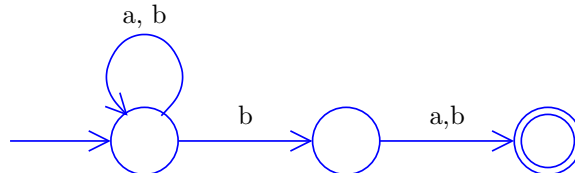
Uusintakoe 22.2. Ratkaisuja ja arvosteluperusteet

1. [4+4 pistettä] Anna kummallekin seuraavista aakkoston  $\{a, b\}$  kielistä sekä säännöllinen lauseke että (deterministinen tai epädeterministinen) äärellinen automaatti.

- (a) Kieli  $A_1$  koostuu kaikista vähintään kahden merkin pituisista merkkijonoista, joissa toiseksi viimeinen merkki on b.

**Vastaus:** Säännöllinen lauseke:  $(a \cup b)^*b(a \cup b)$

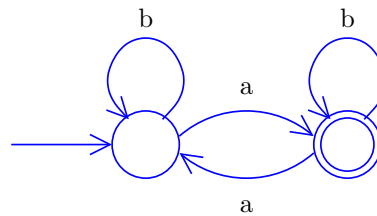
NFA:



- (b) Kieli  $A_2$  koostuu kaikista merkkijonoista, joissa a-merkkejä on pariton määrä.

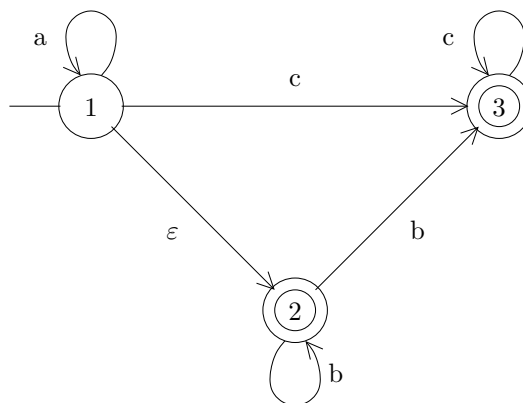
**Vastaus:** Säännöllinen lauseke:  $b^*a(b^*ab^*a)^*b^*$  tai  $b^*a(ab^*a \cup b)^*$

DFA:



**Arvostelu:**

- Kustakin oikeasta lausekkeesta ja automaatista kaksi pistettä.
  - Pienistä virheistä vähennetään piste.
  - Yleinen pieni virhe oli puuttuva  $b^*$  säännöllisessä lausekkeessa kohdassa (b).
2. [8 pistettä] Esitä seuraavan epädeterministisen automaatin tunnistamalle kielelle sen tuottava yhteydetön kielioppi.



**Vastaus:** Kumpikin alla olevista kieliopeista tuottaa automaatin hyväksymän kielen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid X \mid cY \\ X &\rightarrow bX \mid bY \mid \varepsilon \\ Y &\rightarrow cY \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABC \\ A &\rightarrow aA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bB \mid \varepsilon \\ C &\rightarrow cC \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Ensimmäinen kielioppi on johdettu suoraan automaatista: muuttujat vastaavat tiloja,  $\epsilon$ -säännöt ilmaisevat hyväksyvät tilat ja muut säännöt vastaavat siirtymiä.

Toinen kielioppi perustuu havaintoon, että kielen säännöllinen lauseke on  $a^*b^*c^*$ .

**Arvostelu:**

- Oikeasta kieliopista saa täydet 8 pistettä.
- Pienistä virheistä veloitetaan yksi tai kaksi pistettä.
- Kielen oikeasta kuvaamisesta sanallisesti tai säännöllisenä lausekkeena saa kaksi pistettä.

3. [4+8+4 pistettä] Tarkastellaan kieltä

$$B = \{ a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N} \}.$$

(a) Todista, että  $B$  on yhteydetön.

**Vastaus:**  $B$  on yhteydetön, koska seuraava yhteydetön kielioppi tuottaa sen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSc \mid X \\ X &\rightarrow bXc \mid \epsilon \end{aligned}$$

**Arvostelu:**

- Peruseriaatteesta (todistetaan yhteydetttömyys antamalla yhteydetön kielioppi tai pinoautomaatti) saa pisteen.
  - Oikeasta kieliopista tai pinoautomaatista saa täydet neljä pistettä.
  - Pienistä virheistä vähennetään piste.
- (b) Todista, että  $B$  ei ole säännöllinen. Voit käyttää hyväksesi kaikkia kurssilla esitettyjä säännöllisiä kieliä koskevia yleisiä tuloksia, kuten pumppauslemmaa, mutta et tuloksia, jotka sanovat suoraan, että jokin tietty kieli ei ole säännöllinen.

**Vastaus:** Tehdään vastaoletus, että  $B$  on säännöllinen, jolloin pumppauslemman perusteella  $B$ :llä on pumppauspituus  $p$ .

Valitaan  $s = a^p c^p$ . Koska  $s \in B$  ja  $|s| \geq p$ ,  $s$  on  $p$ -pumppautuva, eli jokin jako  $s = xyz$  toteuttaa ehdot:

1.  $xy^i z \in B$  kaikilla  $i \in \mathbb{N}$
2.  $|y| > 0$
3.  $|xy| \leq p$

Ehtojen 2 ja 3 perusteella  $y = a^k$  jollakin  $k > 0$ . Mutta tällöin  $xy^0 z = a^{p-k} c^p \notin B$ . Mikään jako ei siis toteuta kaikkia ehtoja, mikä on ristiriita. Siten  $B$  ei ole säännöllinen.

**Arvostelu:**

- Oikeasta periaatteesta (pumppauslemma) saa yhden pisteen.
  - Pisteen saa myös vetoamalla siihen, että kielen tunnistavassa automaatissa pitäisi olla ääretön määrä tiloja.
  - Vastauksesta, jossa on pumppauslemmaan perustuvan todistuksen oikeita elementtejä, mutta ei järkevää todistusta, voi saada enintään kolme pistettä.
  - Virheettömästä todistuksesta saa täydet 8 pistettä.
  - Pienistä virheistä vähennetään yksi piste ja vähän isommista kaksi.
- (c) Miten todistaisit kielen  $B$  ei-säännöllisyyden helpommin kuin (b)-kohdassa, jos voisit lisäksi käyttää hyväksi tietoa, että kieli  $C = \{ a^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$  ei ole säännöllinen?

**Vastaus:** Kieli  $A = a^* c^*$  on selvästi säännöllinen. Jos  $B$  olisi säännöllinen, niin myös kieli  $C = A \cap B$  olisi säännöllinen, sillä säännöllisten kielten luokka on suljettu leikkauksen suhteen. Koska tiedämme  $C$ :n ei-säännölliseksi, täytyy myös  $B$ :n olla ei-säännöllinen.

**Arvostelu:**

- Säännöllisten kielten sulkeumaominaisuuksiin vetoamisesta saa pisteen.

- Toisen pisteen tuo B:n ja C:n oikea rooli asetelmassa.
- Pisteitä ei saa vastauksesta, jossa vedotaan siihen, että  $C \subset B$ .

Tehtävässä oletetaan, että  $0 \in \mathbb{N}$ .

4. [8 pistettä] Selvitä CYK-algoritmia soveltamalla, kuuluuko merkkijono aabba kieliopin

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \mid YX \\ X &\rightarrow AB \mid BA \\ Y &\rightarrow AX \mid XA \\ A &\rightarrow AA \mid a \\ B &\rightarrow BB \mid b \end{aligned}$$

tuotamaan kieleen.

**Vastaus:** CYK-algoritmi laskee seuraavan taulukon:

|   | 1 | 2 | 3    | 4    | 5    |
|---|---|---|------|------|------|
| 1 | A | A | X, Y | X, Y | S, Y |
| 2 | — | A | X    | X    | Y    |
| 3 | — | — | B    | B    | X    |
| 4 | — | — | —    | B    | X    |
| 5 | — | — | —    | —    | A    |

Taulukon oikeassa ylänurkassa on lähtösymboli  $S$ , joten merkkijono aabba kuuluu kieleen. Taulukosta nähdään myös aabba:n johto:

$$S \Rightarrow YX \Rightarrow AXX \Rightarrow AABX \Rightarrow AABBA \Rightarrow aabba$$

**Arvostelu:**

- Oikein täytetystä CYK-tilukosta saa täydet 8 pistettä.
  - Täydelliseksi vastaukseksi on hyväksytty myös taulukko, jossa täyttäminen on lopetettu, kun on mahdollista varmistua siitä, että oikeaan yläkulmaan tulee lähtösymboli.
  - Pikkuvirheistä vähennetään piste.
  - Monessa vastauksessa taulukon nurkan läheisyydessä esiintyvät monet virheet viittaavat systemaattiseen ongelmaan. Tästä vähennetään kolme tai neljä pistettä.
  - Väärästä vastauksesta vähennetään kaksi pistettä lisää.
  - Oikeasta johdosta ilman perusteluja saa kaksi pistettä.
  - Jos johtoon on päädytty jollain muulla perustellulla systemaattisella menetelmällä kuin CYK-algoritmilla, voi saada pisteen tai kaksi lisää.
5. [8 pistettä] Määrittele lyhyesti termit Turing-ratkeava ja Turing-tunnistettava. Kuvaa niiden suhde toisiinsa sekä muihin kurssilla esiteltyihin kieliluokkiin. Anna esimerkki kielestä, joka kuuluu täsmälleen yhteen näistä kahdesta kieliluokasta. Mihin näistä kieliluokista kuuluu esimerkkikielesi komplementti?

**Vastaus:** Kieli  $L$  on Turing-tunnistettava, jos jokin Turingin kone  $M$  tunnistaa sen, eli  $M$  hyväksyy merkkijonon  $w$ , jos ja vain jos  $w \in L$ . Jos  $w \notin L$ , niin  $M$  joko hylkää  $w$ :n tai ei pysähdy koskaan.

Kieli  $L$  on Turing-ratkeava, jos jokin Turingin kone  $M$  ratkaisee sen, eli  $M$  hyväksyy merkkijonon  $w$ , jos  $w \in L$ , ja hylkää  $w$ :n, jos  $w \notin L$ . Nyt  $M$  siis pysähtyy kaikilla syötteillä.

Turing-ratkeavat kielet ovat aina myös Turing-tunnistettavia. Kaikki muut kurssilla esiintyneet kieliluokat, säännölliset ja yhteydettömät kielet sekä luokat P ja NP, ovat Turing-ratkeavien kielten osajoukkoja.

Esimerkiksi universaalikieli  $A_{TM}$  ja pysähtymisongelma  $HALT_{TM}$  ovat Turing-tunnistettavia mutta eivät Turing-ratkeavia. Tällaisten kielten komplementit eivät ole edes Turing-tunnistettavia.

**Arvostelu:**

- Oikeista määritelmistä saa yhteensä neljä pistettä.
- Pienistä virheistä, puutteista tai epätasällisyyksistä voidaan vähentää piste.
- Termien olennainen ero (pysähtyminen kaikilla syötteillä) on kahden pisteen arvoinen. Siis pelkkä sen mainitseminen tuottaa ainakin kaksi pistettä ja sen puuttuminen vähentää ainakin kaksi pistettä.
- Seuraavista saa yhden pisteen kustakin:
  - keskinäinen suhde
  - suhde muihin kieliluokkiin
  - esimerkkikieli
  - esimerkkikielen komplementti.